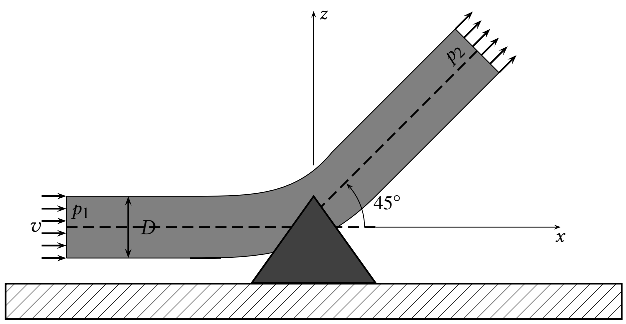
EAMB7021 Mecânica dos Fluidos Intermediária
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 18 Abr 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO — Assinatura: ____________

---

1 [20] Água, com massa específica constante ρ, escoa em regime permanente através da curva mostrada na figura num plano vertical. A velocidade v_0 é constante na seção circular, de diâmetro D. Através da curva, a pressão absoluta *interna* da tubulação cai de $p_1 = 2p_0$ para $p_2 = 1{,}8p_0$ (p_0 é a pressão atmosférica). Desprezando o peso do fluido na curva, calcule as componentes F_x (horizontal) e F_z (vertical) da força que o suporte prismático de seção triangular (em cinza escuro) tem que fazer sobre a curva para mantê-la no lugar.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação da continuidade produz velocidade constante ao longo da tubulação:

$$v_2 = v_1 = v.$$

Desprezando-se o peso, a equação de balanço de quantidade de movimento é

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_s &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A\\ &= \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A,\end{aligned}$$

pois o escoamento é permanente.
Na direção x,

$$\begin{aligned}F_x + p_1\frac{\pi D^2}{4} - p_2\frac{\pi D^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} &= -\rho v^2\frac{\pi D^2}{4} + \rho v^2\frac{\pi D^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2};\\ F_x + p_0\frac{\pi D^2}{4} - \frac{9}{5}p_0\frac{\pi D^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} &= -\rho v^2\frac{\pi D^2}{4} + \rho v^2\frac{\pi D^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2};\\ F_x = \frac{\pi D^2}{4}\left[\left(\frac{9\sqrt{2}}{10} - 1\right)p_0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\rho v^2\right].\end{aligned}$$

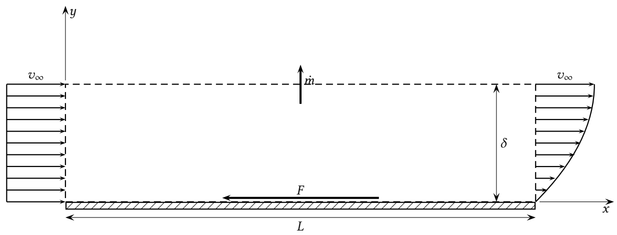
Na direção z,

$$\begin{aligned}F_z - p_2\frac{\pi D^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} &= \rho v^2\frac{\pi D^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2};\\ F_z &= \frac{9}{5}p_0\frac{\pi D^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \rho v^2\frac{\pi D^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\pi D^2}{4}\left[\frac{9}{5}p_0\frac{\sqrt{2}}{2} + \rho v^2\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] A figura ao lado mostra um fluido de massa específica constante ρ escoando sobre uma placa e formando uma camada-limite. O perfil de velocidade na seção de saída do volume de controle tracejado pode ser bem aproximado por

$$v(y) = \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{\delta^3}\right] v_\infty.$$



A largura da placa (em z) é B. Calcule:

a) O valor do fluxo de massa $\dot{m}$ através da superfície superior do volume de controle.

b) O valor da força horizontal F da placa sobre o fluido dentro do volume de controle.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Para regime permanente, o balanço de massa para o volume de controle tracejado é

$$\begin{aligned}
0 &= -\int_{y=0}^{\delta} \rho v_\infty B\,\mathrm{d}y + \dot{m} + \int_{y=0}^{\delta} \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{\delta^3}\right] v_\infty B\,\mathrm{d}y;\\
&= -\delta \int_{\eta=0}^{1} \rho v_\infty B\,\mathrm{d}\eta + \dot{m} + \delta \int_{y=0}^{\delta} \left[\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3\right] v_\infty B\,\mathrm{d}\eta;\\
&= -\rho v_\infty B\delta + \dot{m} + \frac{5}{8}\rho v_\infty B\delta;\\
\dot{m} &= \frac{3}{8}\rho v_\infty B\delta.
\end{aligned}$$

O balanço de quantidade de movimento na direção x é

$$\begin{aligned}
-F &= -\int_0^{\delta} \rho v_\infty^2 B\,\mathrm{d}y + \int_{x=0}^{L} \rho v_\infty (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}) B\,dx + \int_0^{\delta} \rho \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{\delta^3}\right]^2 v_\infty^2 B\,\mathrm{d}y\\
&= -\rho v_\infty^2 B\delta + v_\infty \dot{m} + \rho v_\infty^2 B\delta \int_0^1 \left[\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3\right]^2 \mathrm{d}\eta\\
&= -\rho v_\infty^2 B\delta + v_\infty \dot{m} + \frac{17}{35}\rho v_\infty^2 B\delta;\\
F &= \frac{18}{35}\rho v_\infty^2 B\delta - v_\infty \dot{m}\\
&= \left[\frac{18}{35} - \frac{3}{8}\right]\rho v_\infty^2 B\delta\\
&= \frac{39}{280}\rho v_\infty^2 B\delta \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Um gás (com equação de estado $p = \rho RT$, onde R é a constante do gás; calor específico a volume constante c_v; e calor específico a pressão constante c_p) escoa em um duto circular e horizontal. O escoamento sofre um súbito alargamento de diâmetro, que passa de D para $2D$. Imediatamente antes do alargamento, a pressão é p_1, a temperatura absoluta é T_1, e a velocidade (aproximadamente uniforme na sessão) é v_1. Supondo que a expansão do gás através do alargamento seja adiabática ($p/\rho^\gamma = \text{const.}$; $\gamma = c_p/c_v$), Obtenha um sistema de 4 equações nas 4 incógnitas p_2, T_2, v_2 e ρ_2 (pressão, temperatura, velocidade e massa específica imediatamente após a expansão) em função de p_1, T_1, v_1 e ρ_1. Como você calcula ρ_1?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A conservação de massa é

$$\begin{aligned}\rho_1 v_1 \frac{\pi D^2}{4} &= \rho_2 v_2 \frac{\pi 4D^2}{4};\\ \rho_1 v_1 &= 4\rho_2 v_2. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

A equação de estado é

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho_1 R T_1,\\ p_2 &= \rho_2 R T_2. \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

Obtemos, portanto,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1}.$$

A equação para uma transformação adiabática é

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}. \tag{$\star\star\star$}$$

Finalmente, a equação de conservação de energia levando em conta apenas o trabalho associado à pressão, e fluxo de calor nulo, é

$$0 = \oint_{\mathscr{S}} (u + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho})\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,dA. \tag{$\star\star\star\star$}$$

Observe que conhecemos tudo na seção 1: pressão (p_1), temperatura (T_1), massa específica (ρ_1, em função de p_1, R e T_1), e velocidade (v_1). Temos 4 incógnitas na seção 2: p_2, v_2, T_2 e ρ_2, e 4 equações: ($\star$), ($\star\star$), ($\star\star\star$), e ($\star\star\star\star$).
As vazões mássicas de entrada e saída são iguais; portanto, a equação de energia fica

$$\begin{aligned} 0 &= -\left[\left(u_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) + \frac{v_1^2}{2}\right] + \left[\left(u_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) + \frac{v_2^2}{2}\right]\\ 0 &= (h_2 - h_1) + \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right)\\ 0 &= c_p(T_2 - T_1) + \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Em resumo, as 4 equações são

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 &= 4\rho_2 v_2,\\ p_2 &= \rho_2 R T_2,\\ \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} &= \frac{p_1}{\rho_1^\gamma},\\ 0 &= c_p(T_2 - T_1) + \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Em um canal retangular de grande largura (direção y) e profundidade h (direção z), o perfil vertical de velocidade é parabólico,

$$v_x(z) = 2v_0 \left[\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right],$$

e o escoamento é laminar. A única componente não-nula de velocidade é v_x. Se a viscosidade dinâmica é μ, obtenha o perfil de tensões cisalhantes $T_{xz}(z)$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} T_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 2v_0 \left[\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \right\} \\ &= 2\mu v_0 \left(\frac{1}{h} - \frac{z}{h^2} \right) \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Partindo do balanço integral para um soluto,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} c\rho \,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} c\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A = -\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A,$$

e usando a lei de Fick

$$\boldsymbol{j} = -\rho D \boldsymbol{\nabla} c$$

(onde D é a difusividade do soluto no fluido, e ρ é a massa específica da mistura), deduza a equação diferencial de transporte para a concentração mássica c.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$