EAMB7021 Mecânica dos Fluidos Intermediária
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 21 Mar 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] (Capítulo 1) Se

$$\boldsymbol{v} = (2xy, 2xz, 2yz),$$

calcule

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = ?$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial x} + \frac{\partial(2xz)}{\partial y} + \frac{\partial(2yz)}{\partial z} = 2y + 0 + 2y = 4y \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Se

$$pV = nR_uT$$

é a lei dos gases ideais, e se para um determinado gás com massa molar M_m e com massa total m vale a relação equivalente

$$p = \rho RT,$$

onde p é a pressão, V é o volume ocupado pelo gás, n é o número de moles, R_u é a constante universal dos gases, T é a temperatura termodinâmica, ρ é a massa específica, e R é a constante específica do gás,

a) prove a segunda equação a partir da primeira;

b) qual é a relação matemática entre R_u e R?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
pV &= nR_uT, \\
p &= \frac{1}{V}nR_uT \\
&= \frac{1}{V}\frac{m}{M_m}R_uT \\
&= \frac{m}{V}\frac{R_u}{M_m}T \\
&= \rho RT,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{m}{V}, \\
R &= \frac{R_u}{M_m} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Seja o campo de velocidade bidimensional

$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{y}{1+x},\\
v_y &= \frac{x}{1+y}.
\end{aligned}
$$

Determine a trajetória da partícula que ocupa a posição $(1,1)$ em $t=0$. Observação: é suficiente escrever a "trajetória" na forma

$$
f(x,y)=0.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{y}{1+x},\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{x}{1+y}.
\end{aligned}
$$

É possível "eliminar" $\mathrm{d}t$:

$$
\mathrm{d}t = \frac{(1+x)}{y}\mathrm{d}x = \frac{(1+y)}{x}\mathrm{d}y.
$$

Esta última equação é separável!

$$
\begin{aligned}
x(1+x)\mathrm{d}x &= y(1+y)\mathrm{d}y,\\
\int_1^x u(1+u)\mathrm{d}u &= \int_1^y v(1+v)\mathrm{d}v,\\
\frac{1}{6}\left[2x^3+3x^2-5\right] &= \frac{1}{6}\left[2y^3+3y^2-5\right],\\
\left[2x^3+3x^2-5\right] &= \left[2y^3+3y^2-5\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Em um canal retangular com largura b e profundidade de escoamento h, o perfil vertical de velocidade é aproximadamente constante com z:

$$v_x(z) \approx v_0;$$

e o perfil de concentração mássica de sedimentos em suspensão é aproximadamente linear:

$$c(z) \approx c_0(1 - z/h).$$

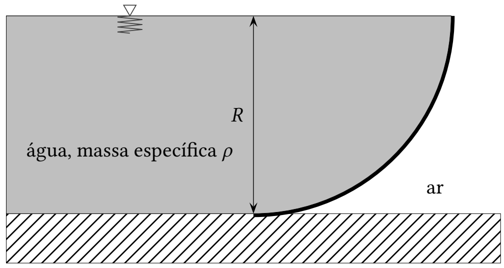
Suponha que $c(z)$ é suficientemente pequena para não mudar muito o valor da massa específica total de fluido, e que consequentemente $\rho \approx$ constante. Calcule o fluxo advectivo de massa de sedimento através de uma seção transversal de dimensões $b \times h$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\dot{M}_A &= \int_{\mathscr{S}} c\rho(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A \\
&= \int_{y=0}^{b} \int_{z=0}^{h} c_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \rho v_0 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\
&= b v_0 \int_0^h c_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \rho \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{v_0 c_0 \rho b h}{2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Uma barragem cilíndrica possui raio R (no plano xz) e largura B (ao longo de y). A barragem está mostrada em linha preta grossa na figura ao lado. Calcule a força da água sobre a barragem, em função de ρ (massa específica da água), g (aceleração da gravidade) e da geometria do problema.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \int_{\mathscr{S}} p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A,\\
\boldsymbol{n} &= (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)),\\
\boldsymbol{F} &= \int_{\theta=0}^{-\pi/2} \rho g R \operatorname{sen}(\theta)(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) BR\,\mathrm{d}\theta\\
&= \rho g B R \left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹