EAMB7009 Dinâmica Espectral da Turbulência
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 22 Out 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Seja $u(\omega, t)$, $t \in \mathbb{R}$, um processo estocástico. Lembre-se de que ω é o "índice" do "sorteio"; cada ω sorteia uma função de t. Qual é a condição matemática para que u seja um processo estacionário?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Todos os momentos, de qualquer ordem n, para instantes $t_1, t_2, \ldots t_n$ devem ser invariantes sob uma translação no tempo:

$$\langle u(\omega, t_1) u(\omega, t_2) \ldots u(\omega, t_n) \rangle = \langle u(\omega, 0) u(\omega, t_2 - t_1) \ldots u(\omega, t_n - t_1) \rangle \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Seja $u(\omega, t),\ t \in \mathbb{R}$, um processo estocástico estacionário. O que é a escala integral $\mathscr{T}$ de u?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \langle u(\omega, t) \rangle\,; \\
R(\tau) &= \left\langle [u(\omega, t) - \mu)][u(\omega, t+\tau) - \mu] \right\rangle\,; \\
\varrho(\tau) &= \frac{R(\tau)}{R(0)}; \\
\mathscr{T} &= \int_0^\infty \varrho(\tau)\, \mathrm{d}\tau \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Seja $u(\omega, x),\ x \in \mathbb{R}$, um processo estocástico homogêneo. Defina matematicamente o espectro $F_{uu}(k)$ de u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \langle u(\omega, x) \rangle\,; \\
R(r) &= \left\langle [u(\omega, x) - \mu)][u(\omega, x + r) - \mu] \right\rangle\,; \\
F_{uu}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{r=-\infty}^{+\infty} R(r) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\,\mathrm{d}r \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [40] Considere um escoamento turbulento no qual existe um campo de velocidade $\boldsymbol{U}$ isotrópico com velocidade média nula, e um campo de temperatura Θ *com um gradiente médio constante*. Em termos da separação de Reynolds,

$$
\begin{aligned}
U_i &= 0 + u_i,\\
\Theta &= \langle\Theta\rangle + \theta,\\
\frac{\partial\langle\Theta\rangle}{\partial x_i} &= k_i,
\end{aligned}
$$

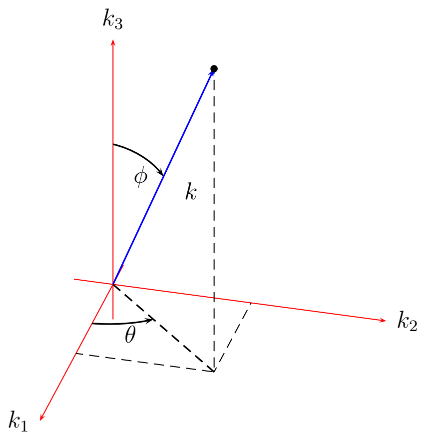
onde k_i é uma constante para cada direção i. **?** () obteve o seguinte resultado para o espectro cruzado entre θ e u_i:

$$
\Phi_{\theta,i}(\boldsymbol{k}) = -\frac{\partial\langle\Theta\rangle}{\partial x_j} B(k)\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right). \qquad (\star)
$$

Note que esse $\Phi_{\theta,i}(\boldsymbol{k})$ é puramente real. Mostre que

$$
E_{\theta,i}(k) = \oint_{\boldsymbol{k}=k} \Phi_{\theta,i}(\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{k} = -\frac{8}{3}\frac{\partial\langle\Theta\rangle}{\partial x_i}\pi k^2 B(k). \qquad (\star\star)
$$

Você pode usar o seguinte: em coordenadas esféricas, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$, e



$$
\begin{aligned}
k_1 &= k \operatorname{sen}\phi\cos\theta,\\
k_2 &= k \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\\
k_3 &= k\cos\phi.
\end{aligned}
$$

Valem também as seguintes integrais, que você pode usar sem ter que calcular:

$$
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0; \qquad \int_{\phi=0}^{\pi} (1-\cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{4}{3}; \qquad \int_{\theta=0}^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi;
$$

$$
\int_0^{2\pi} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0; \qquad \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi;
$$

$$
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta = 0; \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi(2-\operatorname{sen}^2\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{8}{3}.
$$

Além disso, em coordenadas esféricas, temos que

$$
\int_{|\boldsymbol{k}|=k} f(\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{k} = \int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} f(k,\phi,\theta)\,k^2\operatorname{sen}\phi\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta.
$$

Sugestão: Para que $(\star)$ leve a $(\star\star)$, é preciso que a seguinte integral seja um múltiplo de δ_{ij}:

$$
\int_{|\boldsymbol{k}|=k}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\mathrm{d}^2\boldsymbol{k} = \frac{8\pi k^2}{3}\delta_{ij}.
$$

Você pode chegar a essa conclusão de maneira abstrata, argumentando com a simetria do problema e a isotropia do integrando, ou obter o resultado por enumeração para os casos $k_ik_j = k_1k_1,\ k_2k_2,\ k_3k_3,\ k_1k_2,\ k_1k_3,\ k_2k_3$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Por simetria e istropia: De fato, para $i \neq j$,

$$
\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)
$$

Continue a solução no verso ⟹

é ímpar em k_i e em k_j, e a integral é nula. Para o caso $i = j$, o resultado deve ser independente da orientação dos eixos (invariante sob uma rotação de eixos). Escolha portanto $i = j = 3$:

$$\begin{aligned}
\int_{|\boldsymbol{k}|=k} \left(\delta_{33} - \frac{k_3 k_3}{k^2}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{k} &= \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(1 - \frac{k^2 \cos^2\phi}{k^2}\right) k^2 \operatorname{sen}\phi \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\
&= k^2 \left[\int_{\phi=0}^{\pi} (1 - \cos^2\phi) \operatorname{sen}\phi \,\mathrm{d}\phi\right] \left[\int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right] \\
&= k^2 \times 4/3 \times 2\pi = \frac{8\pi k^2}{3} \blacksquare
\end{aligned}$$

Isso também pode ser calculado por enumeração, caso a caso. Para $(i, j) = (1, 1)$:

$$\begin{aligned}
\int_{|\boldsymbol{k}|=k} \left(\delta_{11} - \frac{k_1 k_1}{k^2}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{k} &= \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(1 - \frac{k^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta}{k^2}\right) k^2 \operatorname{sen}\phi \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\
&= k^2 \int_{\phi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\phi \int_{\theta=0}^{2\pi} (1 - \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta) \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
&= k^2 \int_{\phi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\phi (2\pi - \pi \operatorname{sen}^2\phi) \,\mathrm{d}\phi \\
&= \pi k^2 \int_{\phi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\phi (2 - \operatorname{sen}^2\phi) \,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{8\pi k^2}{3}.
\end{aligned}$$

Para $(i, j) = (2, 2)$:

$$\begin{aligned}
\int_{|\boldsymbol{k}|=k} \left(\delta_{11} - \frac{k_1 k_1}{k^2}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{k} &= \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(1 - \frac{k^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta}{k^2}\right) k^2 \operatorname{sen}\phi \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\
&= k^2 \int_{\phi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\phi \int_{\theta=0}^{2\pi} (1 - \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta) \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
&= k^2 \int_{\phi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\phi (2\pi - \pi \operatorname{sen}^2\phi) \,\mathrm{d}\phi \\
&= \pi k^2 \int_{\phi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\phi (2 - \operatorname{sen}^2\phi) \,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{8\pi k^2}{3}.
\end{aligned}$$

Para $(i, j) = (1, 2)$:

$$\begin{aligned}
\int_{|\boldsymbol{k}|=k} \left(\frac{k_1 k_2}{k^2}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{k} &= \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} [\operatorname{sen}\phi \cos\theta][\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta] \operatorname{sen}\phi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
&= \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi \,\mathrm{d}\phi\right] \left[\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \,\mathrm{d}\theta\right] = 0.
\end{aligned}$$

Para $(i, j) = (1, 3)$:

$$\begin{aligned}
\int_{|\boldsymbol{k}|=k} \left(\frac{k_1 k_3}{k^2}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{k} &= \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} [\operatorname{sen}\phi \cos\theta][\cos\phi] \operatorname{sen}\phi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
&= \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \,\mathrm{d}\phi\right] \left[\int_0^{2\pi} \cos\theta \,\mathrm{d}\theta\right] = 0.
\end{aligned}$$

Para $(i, j) = (2, 3)$:

$$\begin{aligned}
\int_{|\boldsymbol{k}|=k} \left(\frac{k_2 k_3}{k^2}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{k} &= \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} [\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta][\cos\phi] \operatorname{sen}\phi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
&= \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \,\mathrm{d}\phi\right] \left[\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}\theta\right] = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹