EAMB 7004 Camadas-Limite Naturais e Dispersão de Poluentes
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 05 Nov 2021
Entrega em 08 Nov 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao material didático da disciplina.

NOME: Assinatura: ______________________________

Um método de "perturbação" para as equações governantes médias sob a aproximação de Boussinesq

A notação desta prova é a mesma adotada no curso. Por isso, os símbolos usuais não serão definidos.

1 [25] **Uma equação de estado consistente para as flutuações de Boussinesq e de Reynolds**
Suponha que vale a equação de estado linearizada

$$\frac{\rho_\delta}{\rho_r} = -\beta_p T_\delta,$$

onde $\beta_p = \beta_p(T_r, p_r)$ é calculado no estado hidrostático de referência. Usando as decomposições de Boussinesq e de Reynolds para ρ e T apresentadas em aula, mostre que ela se desdobra em duas equações de estado "naturais" para as médias das flutuações de Boussinesq, e para as flutuações de Reynolds:

$$\frac{\overline{\rho_\delta}}{\rho_r} = -\beta_p \overline{T_\delta},$$

$$\frac{\rho'}{\rho_r} = -\beta_p T'.$$

Além disso, utilizando diretamente

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\beta_p \mathrm{d}T + \kappa_T \mathrm{d}p,$$

mostre que

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial x_i} = -\rho_r \beta_p \frac{\partial T_r}{\partial x_i} + \rho_r \kappa_T \frac{\partial p_r}{\partial x_i}.$$

Note que a partir da linearlização, β_p pode ser considerado um número fixo que não varia nem com t, nem com x_i.

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] **O termo de 2ª ordem da equação da continuidade**

Considere a equação da continuidade e suas ordens de grandeza:

$$\underbrace{\frac{\partial\overline{\rho_\delta}}{\partial t}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\overline{u_i}\frac{\partial\rho_r}{\partial x_i}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\overline{u_i}\frac{\partial\overline{\rho_\delta}}{\partial x_i}}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\rho_r\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_i}}_{\mathrm{IV}} + \underbrace{\overline{\rho_\delta}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_i}}_{\mathrm{V}} + \underbrace{\frac{\partial\overline{\rho' u_i'}}{\partial x_i}}_{\mathrm{VI}} = 0.$$

Das aulas, sabemos que cada termo de IV tem ordem de grandeza $\rho_0\tilde{u}/\ell$, e que todos os outros os termos acima (sem considerar somas) têm ordem de grandeza muito menor, $\tilde{\rho}\tilde{u}/\ell$. Reescreva portanto:

$$\underbrace{\frac{\partial\overline{\rho_\delta}}{\partial t}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\overline{u_i}\frac{\partial\rho_r}{\partial x_i}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\overline{u_i}\frac{\partial\overline{\rho_\delta}}{\partial x_i}}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\overline{\rho_\delta}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_i}}_{\mathrm{V}} + \underbrace{\frac{\partial\overline{\rho' u_i'}}{\partial x_i}}_{\mathrm{VI}} = -\underbrace{\rho_r\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_i}}_{\mathrm{IV}} = 0.$$

Suponha que o campo médio de velocidade é, em 1ª aproximação, solenoidal: $\partial\overline{u_i}/\partial x_i = 0$. Mostre que

$$\frac{\partial\overline{\rho_\delta}}{\partial t} + \overline{u_i}\frac{\partial\overline{\rho_\delta}}{\partial x_i} + \overline{u_i}\frac{\partial\rho_r}{\partial x_i} + \frac{\partial\overline{\rho' u_i'}}{\partial x_i} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

3 [50] Combinando os resultados das Questões **1** e **2**, deduza uma equação para o campo médio de temperatura:

$$\frac{\partial(T_r + \overline{T_\delta})}{\partial t} + \overline{u_i}\frac{\partial(T_r + \overline{T_\delta})}{\partial x_i} + \frac{\partial\overline{T'u_i'}}{\partial x_i} - \overline{u_i}\frac{\kappa_T}{\beta_p}\frac{\partial p_r}{\partial x_i} + \overline{T'u_i'}\left(-\beta_p\frac{\partial T_r}{\partial x_i} + \kappa_T\frac{\partial p_r}{\partial x_i}\right) = 0.$$

Atenção: Na dedução da equação acima, você deve desprezar um termo considerando que $\frac{\overline{\rho_\delta}}{\rho_r} \ll 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹