EAMB 7004 Camadas-Limite Naturais e Dispersão de Poluentes
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 07 Out 2021
Entrega em 08 Out 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao material didático da disciplina.

NOME: Assinatura: ______________________

---

1 [25]

a) [10] Conceitue média e variância de população de uma variável aleatória u.

b) [15] Se a distribuição de u é

$$F(u^\#) = P(u < u^\#) = 1 - \exp\left(-\frac{u^\#}{\lambda}\right), \qquad u^\# \geq 0,$$

calcule a média e a variância de u em função de λ.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\overline{u} = \int_{\mathbb{R}} u \,\mathrm{d}F(u),$$
$$\operatorname{Var}\{u\} = \int_{\mathbb{R}} (u - \overline{u})^2 \,\mathrm{d}F(u).$$

b) Se

$$F(u) = 1 - \exp\left(-\frac{u}{\lambda}\right), \Rightarrow$$
$$\overline{u} = \int_0^\infty u \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{u}{\lambda}\right) \,\mathrm{d}u = \lambda;$$
$$\operatorname{Var}\{u\} = \int_0^\infty (u-\lambda)^2 \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{u}{\lambda}\right) \,\mathrm{d}u = \lambda^2 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Considerando a decomposição de Reynolds

$$u = \overline{u} + u',$$

(e o mesmo para v), se u e v são duas grandezas físicas em um escoamento turbulento, os "postulados" de Reynolds (supondo por simplicidade que as variáveis dependem apenas de t, e não de $\boldsymbol{x}$) são

$$\begin{aligned}\overline{u'} &= 0,\\ \overline{\overline{u}} &= \overline{u},\\ \overline{u'\overline{v}} &= 0,\\ \overline{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}} &= \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

para a média de conjunto ou média probabilística

$$\overline{u} = \int_{\omega\in\Omega} u\,\mathrm{d}P(\omega).$$

Considere agora a média temporal

$$\langle u\rangle(t) = \frac{1}{T}\int_{t'=t-T/2}^{t'=t+T/2} u(t')\,\mathrm{d}t'.$$

Quais dos postulados de Reynolds não se aplicam para $\langle u\rangle$? (Verifique cada um, e mostre o que vale e o que não vale.)

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned}u'(t) &= u(t) - \langle u\rangle(t),\\ &= u(t) - \frac{1}{T}\int_{t'=t-T/2}^{t'=t+T/2} u(t')\,\mathrm{d}t';\\ \langle u'\rangle(t) &= \frac{1}{T}\int_{t'=t-T/2}^{t'=t+T/2}\left[u(t') - \langle u\rangle(t')\right]\,\mathrm{d}t'\\ &= \frac{1}{T}\int_{t'=t-T/2}^{t'=t+T/2}\left[u(t') - \frac{1}{T}\int_{s'=t'-T/2}^{s'=t'+T/2} u(s')\,\mathrm{d}s'\right]\,\mathrm{d}t'\\ &= \frac{1}{T}\int_{t'=t-T/2}^{t'=t+T/2} u(t')\,\mathrm{d}t' - \frac{1}{T}\int_{t'=t-T/2}^{t'=t+T/2}\left[\frac{1}{T}\int_{s'=t'-T/2}^{s'=t'+T/2} u(s')\,\mathrm{d}s'\right]\,\mathrm{d}t'\\ &= \langle u\rangle(t) - \frac{1}{T}\int_{t'=t-T/2}^{t'=t+T/2}\langle u\rangle(t')\,\mathrm{d}t'\\ &= \langle u\rangle(t) - \langle\langle u\rangle\rangle(t) \neq 0 \qquad \text{em geral.}\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro dos postulados não se aplica.

b)

$$\begin{aligned}\langle\langle u\rangle\rangle(t) &= \frac{1}{T}\int_{t'=t-T/2}^{t'=t+T/2}\left[\frac{1}{T}\int_{s'=t'-T/2}^{s'=t'+T/2} u(s')\,\mathrm{d}s'\right]\mathrm{d}t'\\ &= \frac{1}{T}\int_{t'=t-T/2}^{t'=t+T/2}\langle u\rangle(t')\,\mathrm{d}t' \neq \langle u\rangle(t) \qquad \text{em geral.}\end{aligned}$$

O segundo dos postulados não se aplica.

c)

$$\begin{aligned}\langle u'\langle v\rangle\rangle(t) &= \langle[u - \langle u\rangle]\langle v\rangle\rangle(t)\\ &= \langle u\langle v\rangle\rangle(t) - \langle\langle u\rangle\langle v\rangle\rangle(t) \neq 0 \qquad \text{em geral.}\end{aligned}$$

O terceiro dos postulados não se aplica.

d) A maneira mais fácil é calcular cada um dos dois "lados" da (suposta) igualdade:

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\rangle &= \frac{1}{T}\int_{t'=t-T/2}^{t'=t+T/2}\frac{\mathrm{d}u(t')}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t'\\ &= \frac{u(t+T/2) - u(t-T/2)}{T}.\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

E

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\langle u\rangle\,(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t-T/2}^{t+T/2} u(t')\,\mathrm{d}t';$$

seja U a primitiva de u:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} &= u(t);\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\langle u\rangle\,(t)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{T}\,[U(t+T/2) - U(t-T/2)]\right\}\\
&= \frac{U'(t+T/2) - U'(t-T/2)}{T}\\
&= \frac{u(t+T/2) - u(t-T/2)}{T}.
\end{aligned}$$

Portanto, apenas o quarto dos postulados se aplica.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Como sabemos, a derivada material de uma grandeza a qualquer em Mecânica dos Fluidos é definida como

$$\frac{Da}{Dt} \equiv \frac{\partial a}{\partial t} + u_i \frac{\partial a}{\partial x_i},$$

onde $\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i$ é o campo de velocidade. O volume específico em um escoamento é definido por

$$v \equiv \frac{1}{\rho},$$

onde ρ é a massa específica. Utilizando os fatos acima, mostre que a equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0,$$

pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{v}\frac{Dv}{Dt}.$$

Interprete essa última expressão.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiro expandimos a equação da continuidade:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.\end{aligned}$$

Multiplicamos por $v = 1/\rho$:

$$\begin{aligned}v\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= -v\frac{D\rho}{Dt} \\ &= -v\frac{D\frac{1}{v}}{Dt} \\ &= -v\left[-\frac{\frac{Dv}{Dt}}{v^2}\right] \\ &= \frac{1}{v}\frac{Dv}{Dt} \blacksquare\end{aligned}$$

A divergência da velocidade é igual, em cada ponto, à taxa de variação de volume por unidade de volume.

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Utilizando a notação definida em sala de aula, mostre que

$$\frac{\breve{u}}{\tilde{u}} = \mathrm{Re}_\ell^{-1/4}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\overline{\epsilon_e} &= \nu_u \frac{\breve{u}^2}{\eta_u^2} = \frac{\tilde{u}^3}{\ell} = \frac{\tilde{u}^2 \tilde{u}}{\ell};\\
\nu_u \frac{\breve{u}^2}{\tilde{u}^2 \eta_u^2} &= \frac{\tilde{u}}{\ell};\\
\frac{\breve{u}^2}{\tilde{u}^2} &= \frac{\tilde{u}}{\nu_u \ell}\eta_u^2;\\
\eta_u^2 &= \left(\frac{\nu_u^3}{\overline{\epsilon_e}}\right)^{1/2};\\
\frac{\breve{u}^2}{\tilde{u}^2} &= \frac{\tilde{u}}{\nu_u \ell}\left(\frac{\nu_u^3}{\overline{\epsilon_e}}\right)^{1/2}\\
&= \frac{\tilde{u}}{\nu_u \ell}\left(\frac{\nu_u^3 \ell}{\tilde{u}^3}\right)^{1/2}\\
&= \frac{\tilde{u}}{\nu_u \ell}\left(\frac{\nu_u^3 \ell^4}{\tilde{u}^3 \ell^3}\right)^{1/2}\\
&= \frac{\tilde{u}\ell^2}{\nu_u \ell}\left(\frac{\nu_u^3}{\tilde{u}^3 \ell^3}\right)^{1/2}\\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{Re}^{-3}\right)^{1/2}\\
&= \mathrm{Re}^{-1/2} \;\Rightarrow\\
\frac{\breve{u}}{\tilde{u}} &= \mathrm{Re}^{-1/4} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹