

Dinâmica espectral da turbulência

Nelson Luís Dias

1 de novembro de 2018

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contextualização do problema da turbulência	1
1.2	Turbulência e poluição atmosférica	2
1.3	Conteúdo dos próximos capítulos	5
2	Equações Governantes	6
2.1	Equações básicas sem forças de flutuação	6
2.2	Equações espectrais de turbulência	7
2.2.1	Transformadas de Fourier	7
2.2.2	A transformada de Fourier do termo de cisalhamento	7
2.2.3	A eliminação do termo de pressão	8
2.2.4	Médias em $ \mathbf{k} $ (<i>shell averages</i>)	10
2.2.5	Interpretação física	11
2.2.6	Produção e dissipação de energia cinética turbulenta	13
3	Modelos espectrais de fechamento para o termo de transferência inercial	14
3.1	Introdução	14
3.2	A formulação original de Pao	15
3.2.1	Discussão:	15
3.2.2	O cálculo de uma integral elementar	16
3.3	O modelo de Lin (1972) para o espectro de energia cinética turbulenta	16
3.3.1	Primeira tentativa de generalizar o modelo de Lin	18
3.3.2	Segunda tentativa de generalizar o modelo de Lin	19
3.4	Um modelo modificado Pao-Hill para a energia cinética turbulenta	21
3.5	Um modelo de fechamento Pao com produção proporcional a S em regime permanente	24
3.6	Um modelo de fechamento Pao com produção proporcional a S^2 em regime permanente	26
3.7	Um modelo de fechamento Pao-Hill com produção proporcional a S em regime permanente	29
3.8	Um modelo de fechamento Pao-Hill com produção proporcional a S^2 em regime permanente	32
4	O fechamento de Pao para um regime transiente	36
4.0.1	O método das características em variáveis adimensionais	36
4.1	Os efeitos de translação, transferência inercial e dissipação	37
4.2	O cálculo de $\epsilon_e(t)$	38
5	Um escoamento com cisalhamento médio unidirecional	45
5.1	Equações espectrais para cisalhamento médio unidirecional	45
5.2	Solução de equações de 1ª ordem no espaço com o método das características	46

5.2.1	Um exemplo inicial	46
5.2.2	A solução de $\Phi_{3,3}$	47
5.2.3	A solução de $\Phi_{1,3}$	49
5.2.4	A solução de $\Phi_{3,1}$	51
5.2.5	A solução de $\Phi_{1,1}$	52
6	Conclusões e recomendações	55
6.1	Conclusões	55
6.2	Recomendações	56
A	Motivação para a formulação de modelos de transferência	57
B	Uma aproximação para $zK_1(z)$	58
C	O espectro de Pope e de Kang et al.	59
D	A Gamma incompleta e integrais exponenciais	60
E	A função Hil(x, p, a)	62
F	A função Epi(x)	65

Resumo

Os problemas locais de poluição atmosférica (isto é: poluição em escalas horizontais da ordem de 200 km ou menos gerada por fontes na mesma região) são essencialmente problemas de modelagem do efeito da turbulência sobre a dispersão de poluentes. Apesar de todos os avanços da Mecânica dos Fluidos ao longo do século XX, e principalmente das contribuições das escolas russa (Kolmogorov, Obukhov) e inglesa (Richardson, Taylor e Batchelor) para o avanço da Mecânica da Turbulência, o prognóstico da difusão turbulenta ainda é limitado. Todo e qualquer avanço, principalmente nos modelos de engenharia, será baseado ou em fortes esforços experimentais ou em modelos básicos que aprofundem nossa compreensão da dinâmica da turbulência e dos seus efeitos sobre escalares. Este trabalho desenvolve-se ao longo da segunda opção, estudando vários aspectos da turbulência ligados principalmente às taxas de dissipação de energia cinética turbulenta e de variância da temperatura do ar. A temperatura, além de ser o escalar mais importante nos efeitos de produção (ou destruição) de energia cinética turbulenta via fluxo de calor sensível, também serve aqui como um sucedâneo para outros escalares tais como os indicadores clássicos de poluição (SO_x, NO_x, CO, CO₂, O₃, etc.). Por ser mais facilmente mensurável em alta frequência, existem muito mais dados experimentais envolvendo a temperatura do que os gases acima mencionados. Neste trabalho, são desenvolvidos numerosos modelos analíticos para o espectro de energia cinética turbulenta em regime permanente, os quais incorporam o efeito de produção por cisalhamento médio e também modelam a corcova recentemente identificada neste espectro. A constatação de que a corcova pode ser produzida por modelos clássicos de fechamento é uma das contribuições originais do trabalho. Além disso, formulou-se uma nova abordagem para o fechamento espectral que permite que o decaimento da turbulência na ausência de forçantes seja modelado incluindo os termos não-lineares de transferência inercial. Essencialmente, isto é feito por meio da solução de uma equação diferencial parcial não-linear pelo método das características. O método possui um grande potencial de aplicação a problemas transientes na camada-limite atmosférica, tais como a transição que ocorre no fim da tarde e o acoplamento da camada residual com a camada noturna estável, quando poluentes misturados na camada residual podem retornar à superfície. Finalmente, mostra-se como a teoria de distorção rápida, que é essencialmente uma teoria linear, pode ser estendida para incorporar os efeitos clássicos de transferência inercial bem como o efeito de corcova recentemente identificado na literatura.

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo nós fazemos uma revisão da introdução na proposta original para esta Bolsa de Produtividade em Pesquisa, adicionando novos resultados e informações obtidos ao longo destes 3 anos de pesquisa.

1.1 Contextualização do problema da turbulência

A compreensão dos escoamentos turbulentos permanece, neste início do século XXI, o “grande problema não-resolvido da física clássica” (McComb, 1992). O problema não são as equações em si que regem o comportamento dos fluidos debaixo da hipótese do contínuo, que são bem conhecidas (as equações de Navier-Stokes), mas a sua natureza não-linear. A não-linearidade das equações governantes dá origem ao fenômeno da turbulência, ao mesmo tempo em que torna extremamente difícil a obtenção de soluções analíticas que esclareçam o que ocorre em escoamentos turbulentos.

Na natureza, assim como na maioria dos escoamentos de interesse em engenharia (escoamentos em tubos e canais, as camadas-limite nos cascos de navios e submarinos e nas fuselagens de aviões, etc.), a *norma* são os escoamentos turbulentos — muito embora escoamentos invíscidos, em que os efeitos viscosos ou mais geralmente de atrito (inclusive turbulento) são desprezados, sejam de grande utilidade e interesse em aerodinâmica e fenômenos ondulatórios em fluidos.

Assim é que a “conquista” de escoamentos turbulentos prototípicos, tais como escoamentos em tubos e canais, foi de uma enorme relevância e constituiu-se numa área de intensa atividade de pesquisa no século XIX e na primeira metade do século XX. Além de engenheiros, os desafios postos pela turbulência atraíram também pesquisadores com interesse em física e matemática, que trouxeram sua própria maneira de encarar o problema, contribuindo de duas formas distintas:

1. Com procedimentos formais para a geração de famílias de equações para “momentos” de qualquer ordem a partir das equações de Navier-Stokes, de forma que existem restrições mecânicas à forma que estes momentos (sejam eles momentos em 1 ponto, funções de estrutura ou espectros) podem assumir. Estes procedimentos incluem as equações de Reynolds, que trazem em seu bojo o “problema do fechamento”: há sempre mais incógnitas (momentos de qualquer ordem da turbulência) do que equações disponíveis para resolvê-las.
2. Com a abordagem mais geral, e historicamente posterior à de Reynolds, da turbulência como um processo estocástico no espaço, para o qual duas simplificações extremamente importantes são as *hipóteses* de homogeneidade e isotropia. Estas são idéias que surgiram com Taylor (1921; 1935; 1938) e Kolmogorov (1991), e que nos acompanham até hoje.

As escolas mais teóricas concentraram-se muitas vezes no estudo destas formas mais simplificadas de turbulência, já que nelas a sua “marca registrada”, a “cascata de energia” de Kolmogorov caracterizada por uma faixa inercial no espectro (ou, como proposto no artigo original de Kolmogorov, na função de estrutura), já está presente. Embora extremamente atraente e intuitiva, a idéia de uma cascata de energia (na qual transferência de energia cinética turbulenta é local nos números de onda) ainda carece de verificação direta, e tem sido contestada por pesquisadores importantes ([Kraichnan, 1974](#)).

Portanto, do ponto de vista de um físico ou um matemático, o problema já é suficientemente complexo (é não-linear e exibe o espectro característico de todos os escoamentos turbulentos com número de Reynolds suficientemente alto conhecidos), não havendo nenhum motivo para complicá-lo mais ainda com anisotropia e não-homogeneidade antes que progressos claros tenham sido feitos na compreensão destes casos mais simples.

Os “problemas de engenharia” de turbulência que atraem a atividade de pesquisa hoje em dia (por exemplo, difusão turbulenta de poluentes e todo tipo de escoamentos naturais bi ou tridimensionais) são um pouco mais complexos que os escoamentos em tubos e canais estudados por Nikuradse, Prandtl, Blasius e von Kármán, mas mantêm um traço em comum com estes escoamentos “clássicos”, cujas fórmulas para cálculo de perda de carga ganharam os livros de graduação de mecânica dos fluidos: *todos eles são escoamentos em que os fluxos turbulentos de massa, calor e quantidade de movimento são variáveis cuja determinação é central para a sua resolução*. Ora, fluxos turbulentos só podem existir em turbulência não-isotrópica, estando freqüentemente associados também à ocorrência de não-homogeneidade em pelo menos uma das direções coordenadas.

Assim, embora do ponto de vista estritamente teórico haja excelentes motivos para restringir o estudo da turbulência às suas instâncias mais simples de homogeneidade e isotropia, existem inúmeros problemas em engenharia e nas geociências que “não podem esperar”, sendo freqüentemente “resolvidos” de forma simplificada naquelas situações de projeto e de simulação em que uma resposta aproximada (por exemplo, o tempo de chegada de uma pluma de poluente até a tomada d’água para abastecimento) é melhor que nenhuma resposta. Por outro lado, muitas das idéias e dos modelos que existem para turbulência isotrópica ou homogênea podem ser estendidas de forma relativamente simples para situações onde prevaleçam situações anisotrópicas.

1.2 Turbulência e poluição atmosférica

Os objetivos desta proposta de pesquisa são o estudo da anisotropia e da não-homogeneidade (ou de sua prima-irmã, a não-estacionariedade) na camada-limite atmosférica, e dos seus efeitos sobre o cálculo de difusão turbulenta de poluentes.

No nosso caso, estamos interessados em determinar, em última análise, o efeito da turbulência sobre poluentes, que podem ser partículas sólidas, líquidas ou então gases dissolvidos na atmosfera. Embora a lista de substâncias potencialmente poluidoras seja gigantesca ([Seinfeld e Pandis, 1998](#)), é comum procurar acompanhar as concentrações na atmosfera de algumas substâncias mais facilmente mensuráveis, e que são aceitas na legislação brasileira como indicadores da qualidade do ar, definidas assim pela freqüência de ocorrência e pelos danos causados à saúde e ao meio ambiente:

Partículas Totais em Suspensão — PTS ou Materiais Particulados — MP: são todas as partículas encontradas no ar, incluindo poeira, fuligem, fumo e gotas líquidas. Os materiais particulados podem ficar em suspensão no ar durante muito tempo. Os seus principais processos de remoção são a deposição gravitacional e a “lavagem” pela chuva. Por isso seu impacto é maior em regiões secas ou em períodos de estiagem. Suas fontes

são diversas, tais como veículos, fábricas, estradas não-pavimentadas, extração mineral, etc. Existem particulados que são altamente tóxicos, como é o caso do amianto. Nas atividades de engenharia, tais como a construção de vias de circulação, o material particulado é emitido em várias etapas, como por exemplo na queima de óleo diesel por caminhões e máquinas e na remoção do solo e manuseio de materiais fragmentados. Os danos causados pelos materiais particulados são diversos, como redução da visibilidade, problemas respiratórios e outros efeitos.

Partículas Inaláveis — **PI**: representam partículas que possuem diâmetro aerodinâmico menor ou igual a $10\ \mu\text{m}$. Estas, por serem menores, afetam mais a saúde, pois são capazes de atingir partes mais internas do sistema respiratório.

Fumaça: é a fração de partículas geradas principalmente nos processos de combustão e representada pela parte visível da pluma, sendo medida pelo método de reflectância ou método equivalente.

Óxidos de Enxofre — SO_x ($\text{SO}_2 + \text{SO}_3$): produzidos na queima de combustíveis que contêm enxofre em suas composições, principalmente óleo cru, carvão e óleo diesel, podendo ainda ser encontrados na queima de gasolina, em menor quantidade. São liberados também na fundição de minério de enxofre e indústria de papel e celulose, sendo bastante solúveis em água e capazes de formar sulfetos. São parcialmente responsáveis pela formação da chuva ácida e quando absorvidos pela respiração podem causar sérios problemas pois são gases muito irritantes e capazes de formar ácidos no interior do sistema respiratório.

Monóxido de Carbono — **CO**: substância incolor e inodora originada principalmente nos processos de combustão incompleta de combustíveis fósseis (com carvão, petróleo, gás natural) e outros materiais que contenham carbono em sua composição (biomassa, por exemplo). Muito prejudicial ao sistema respiratório, pois agrega-se à hemoglobina do sangue (responsável pelo transporte de oxigênio), formando a carboxi-hemoglobina. Assim, a oxigenação do pulmão fica reduzida, podendo levar à morte por asfixia, dependendo da concentração e da exposição a este contaminante.

Ozônio — O_3 : resultante de reações químicas na atmosfera, a partir da presença de óxidos de nitrogênio, hidrocarbonetos e radiação solar. O ozônio na atmosfera pode ser considerado “bom” ou “mau”, dependendo da altitude em que se encontra. Na estratosfera (acima de 12 km) encontra-se a *Camada de Ozônio*, responsável por filtrar a radiação ultravioleta, mas na baixa atmosfera (troposfera) ele é prejudicial. O O_3 pode se formar longe das fontes de seus poluentes precursores, uma vez que é um poluente secundário. Os principais efeitos deste oxidante fotoquímico é a redução da capacidade respiratória, e agravamento de problemas respiratórios tais como a asma. Esta é a substância que mais está causando problemas em grandes cidades ou em regiões industriais, sendo de difícil tratamento por ser produzido em reações químicas, e não ser lançado diretamente para a atmosfera.

Óxidos de Nitrogênio — NO_x (NO e NO_2): são os compostos de nitrogênio e oxigênio resultantes em processos de combustão a altas temperaturas. A grande parte dos óxidos de nitrogênio são incolores e inodoros, mas o NO_2 , junto com outras partículas, pode formar uma camada marrom-avermelhada sobre áreas urbanas. Os NO_x também são solúveis em água, podendo causar chuva ácida no meio ambiente. Nos seres vivos, podem afetar todo o aparelho respiratório nos animais, e nas plantas podem afetar principalmente as folhas. Pelas suas propriedades, podem também causar irritações nasais, dos olhos e desconforto pulmonar. Estes gases também colaboram para a formação de ozônio (troposférico), o chamado *smog* fotoquímico.

Tabela 1.1: Padrões de Qualidade do Ar no Brasil e no Paraná (Resoluções CONAMA 003/90 e SEMA 041/02)

POLUENTE	Padrão Primário (μm^{-3})	Padrão Secundário (μm^{-3})	Tempo de Amostragem	Método de Medição
Partículas totais em Suspensão (PTS)	240 ¹ 80	150 60	24h anual ³	Amostrador de grandes volumes
Partículas inaláveis (PI)	150 ¹ 50	150 ¹ 50	24 h anual ²	Separação inercial ou Filtração
Fumaça	150 ¹ 60	100 ¹ 40	24 h anual ²	Refletância
Dióxido de Enxofre (SO ₂)	365 ¹ 80	100 ¹ 40	24 h anual ²	Pararrosanilina
Monóxido de Carbono (CO)	40.000 ¹ 10.000 ¹	40.000 ¹ 10.000 ¹	1 h 8 h	Infravermelho não dispersivo
Ozônio (O ₃)	160 ¹	160 ¹	1 h	Quimiluminescência
Dióxido de Nitrogênio (NO ₂)	320 100	190 100	1h anual ¹	Quimiluminescência

Notas:

1 – não deve ser excedido mais do que uma vez por ano

2 – média aritmética

3 – média geométrica

A tabela 1.1 mostra os valores-limite para as substâncias regulamentadas, bem como os períodos de registro de médias e seu método de medição e monitoramento no ambiente.

Todos estes poluentes são partículas razoavelmente pequenas ou gases, de forma que é razoável supor que são transportados de forma muito similar pela turbulência atmosférica. Neste caso, a sua concentração na Camada-Limite Atmosférica (CLA) dependerá essencialmente das condições de turbulência na CLA, e da localização de suas fontes e sumidouros na superfície.

Em princípio, aplica-se uma decomposição de Reynolds ao campo instantâneo de concentração de poluente, na forma

$$C = \langle C \rangle + c, \quad (1.1)$$

onde $\langle C \rangle$ é a média probabilística, e c é a flutuação turbulenta do poluente. Qualquer estudo fundamental da difusão de um poluente pela turbulência atmosférica, portanto, deve se basear na medição das suas flutuações turbulentas c simultaneamente com as flutuações turbulentas do campo tri-dimensional de velocidade.

O problema agora é que pode ser muito difícil medir C em uma frequência suficientemente rápida (> 10 Hz) para que seja possível capturar todo o espectro de suas flutuações turbulentas na atmosfera. Em geral medem-se apenas médias temporais de C , as quais são usadas para aproximar $\langle C \rangle$ nos padrões de qualidade do ar: vide tabela 1.1.

Para compreender melhor o transporte e a difusão turbulenta de um poluente na atmosfera, portanto, é preciso lançar mão de conhecimentos obtidos com escalares que funcionem como *sucedâneos* dos poluentes cuja concentração média desejamos, em última análise, modelar e prever. Também está claro que isto não é possível sem um conhecimento igualmente aprofundado do comportamento do campo turbulento de *velocidade tridimensional*. Em resumo, para avançar o estado da arte na capacidade de modelagem de dispersão atmosférica de poluentes e qualidade do ar, é preciso aprofundar o conhecimento sobre a dinâmica da turbulência (*i.e.*

o campo de flutuações de velocidade propriamente dito) e sobre o efeito da turbulência sobre escalares.

Quanto à escolha de escalares que sirvam como sucedâneos para os poluentes atmosféricos, uma possibilidade é o uso de gás traçadores, tais como o hexafluoreto de enxofre (SF_6) (Leclerc et al., 2003a,b) ou os perfluorocarbonos (PFT's) (Watson et al., 2000). Nestes casos, além das dificuldades logísticas e dos custos usuais dos experimentos com traçadores, também existem dificuldades de medição das concentrações destes traçadores em alta frequência, embora elas não sejam incontornáveis.

A outra possibilidade é analisar registros de alta frequência do escalar mais fácil e amplamente mensurável na atmosfera, que é a temperatura do ar. Uma complicação é que a temperatura é um escalar *ativo*: as flutuações de temperatura contribuem para a produção de energia cinética turbulenta na atmosfera, via o fluxo cinemático de calor sensível $\langle w\theta \rangle$, onde w é a flutuação de velocidade vertical e θ é a flutuação de temperatura.

Os principais resultados do presente relatório de pesquisa dizem respeito ao espectro de energia cinética turbulenta na atmosfera, e ao espectro de temperatura na atmosfera. Eles consistem portanto, em uma abordagem *indireta* para o estudo da dispersão atmosférica de poluentes, devido à escassez de dados de campo de concentração de poluentes medidos em alta frequência.

1.3 Conteúdo dos próximos capítulos

No capítulo 2 são deduzidas as principais equações governantes do problema. Faz-se também uma interpretação física e matemática razoavelmente profunda de todos os termos envolvidos. Embora não haja (naturalmente) resultados novos neste capítulo, os resultados apresentados estão muitas vezes espalhados na literatura e não são facilmente reunidos, justificando o esforço de documentar as equações.

No capítulo 3, mostra-se os principais resultados obtidos com a modelagem do espectro de energia cinética turbulenta na faixa inercial e na região de transição para a faixa de dissipação. Deu-se particular atenção à modelagem de um fenômeno que apenas recentemente foi plenamente percebido nos espectros de energia cinética turbulenta, que é a “corcova” do espectro compensado na região de transição entre a faixa inercial e a faixa de dissipação (Saddoughi e Veeravallis, 1994; Kang et al., 2003; Lamorgese et al., 2005) Neste capítulo concentram-se os principais resultados analíticos obtidos durante esta pesquisa. Estes resultados serão brevemente submetidos a periódicos internacionais tais como *Physics of Fluids*, *Journal of Turbulence* ou *Journal of Fluid Mechanics*.

No capítulo 4 nós mostramos como um modelo simples de fechamento espectral de turbulência pode ser estendido para uma situação transiente (o decaimento da turbulência homogênea em um túnel de vento), abrindo caminho para uma possível análise da evolução temporal dos espectros de turbulência em uma camada-limite atmosférica não-estacionária.

No capítulo 5, mostra-se os resultados existentes na literatura para turbulência anisotrópica utilizando-se a teoria de distorção rápida, e que continuaram a ser pesquisados por este autor com o objetivo de sua efetiva aplicação a problemas práticos de dispersão de poluentes na atmosfera.

No capítulo 6 apresenta-se as principais conclusões e recomendações.

Capítulo 2

Equações Governantes

2.1 Equações básicas sem forças de flutuação

Em um escoamento turbulento, a separação de Reynolds para o campo de velocidade, pressão e densidade respectivamente é

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i, \quad (2.1)$$

$$P = \langle P \rangle + p, \quad (2.2)$$

$$\wp = \langle \wp \rangle + \rho. \quad (2.3)$$

onde

$$\langle u_i \rangle = \langle p \rangle = 0; \quad (2.4)$$

além disto, vamos supor inicialmente que as flutuações de densidade sejam desprezíveis (isto é: que o *fluido* é efetivamente incompressível):

$$\rho \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \wp = \text{constante}. \quad (2.5)$$

Conceitualmente, a velocidade total U_i e a flutuação de turbulência u_i são funções aleatórias, e a velocidade média $\langle U_i \rangle$ é uma função determinística da posição \mathbf{x} e do tempo t . Vamos fazer a hipótese de que as flutuações de velocidade u_i e de pressão p são processos estocásticos homogêneos, ou seja: de que quaisquer momentos formados pelos produtos de u_1, u_2, u_3 e p são invariantes debaixo de uma translação. Assim por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_3 u_3 p \rangle = 0. \quad (2.6)$$

A equação da continuidade no domínio do espaço para as 3 componentes de velocidade em (2.1) é

$$\frac{\partial U_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0. \quad (2.7)$$

A equação para as flutuações turbulentas é

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_n} [u_i \langle U_n \rangle + \langle U_i \rangle u_n + u_i u_n - \langle u_i u_n \rangle] = -\frac{1}{\wp} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n}. \quad (2.8)$$

Considerável intuição (*insight*) pode ser obtida pela manipulação da equação dinâmica para as flutuações turbulentas em um escoamento homogêneo. Para tanto, abra a equação com a

regra da derivada do produto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \underbrace{\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_n}}_{=0} + \langle U_n \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + \langle U_i \rangle \underbrace{\frac{\partial u_n}{\partial x_n}}_{=0} + u_n \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} + u_i \underbrace{\frac{\partial u_n}{\partial x_n}}_{=0} + \\ u_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} - \underbrace{\frac{\partial \langle u_i u_n \rangle}{\partial x_n}}_{=0} = -\frac{1}{\wp} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + u_n \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} + u_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = -\frac{1}{\wp} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n}. \quad (2.10)$$

Os 3 primeiros termos nulos em (2.9) são conseqüência da equação da continuidade (2.7); o quarto termo se anula devido à homogeneidade de u_i .

Desejamos calcular as transformadas de Fourier de cada termo de (2.10). O termo envolvendo $\langle U_n \rangle$ e o termo não-linear merecem atenção especial. A condição de cisalhamento constante, *necessária* para turbulência homogênea, é

$$\langle U_n \rangle(x_l) = \langle U_n \rangle_0 + \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} x_l, \quad (2.11)$$

onde $\langle U_n \rangle_0$ é a velocidade em $x_l = 0$, e $\partial \langle U_n \rangle / \partial x_l = \text{constante}$ para todo n e l .

Substituindo (2.11) em (2.10),

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} x_l \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + u_n \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} + u_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = -\frac{1}{\wp} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n} \quad (2.12)$$

2.2 Equações espectrais de turbulência

2.2.1 Transformadas de Fourier

Seja

$$\mathcal{F}[u_i] = \hat{u}_i = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} \quad (2.13)$$

a transformada de Fourier de u_i . A transformada de Fourier do termo não-linear é

$$\mathcal{F} \left[u_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] = \mathcal{F}[u_n] * \mathcal{F} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] = \mathcal{F}[u_n] * ik_n \mathcal{F}[u_i] = ik_n \hat{u}_n * \hat{u}_i. \quad (2.14)$$

Em (2.14), $*$ indica convolução; de fato, (2.14) nada mais é do que o próprio teorema da convolução para transformadas de Fourier. A transformada de toda a equação (2.12) é

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 ik_n \hat{u}_i + \mathcal{F} \left[\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} x_l \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} \hat{u}_n + ik_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{1}{\wp} ik_i \hat{p} - \nu (k_n k_n) \hat{u}_i. \quad (2.15)$$

2.2.2 A transformada de Fourier do termo de cisalhamento

A transformada de Fourier do termo entre colchetes em (2.15) necessita de alguns truques inteligentes para ser explicitada. Primeiramente, note que

$$\frac{\partial}{\partial k_l} e^{-i(k_m x_m)} = -ix_l e^{-i(k_m x_m)}. \quad (2.16)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left[\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} x_l \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] &= \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} x_l \frac{\partial u_i}{\partial x_n} e^{-i(k_m x_m)} d^3 \mathbf{x} \\
&= \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_l} e^{-i(k_m x_m)} \right) d^3 \mathbf{x} \\
&= i \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} \left(\mathcal{F} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] \right) \\
&= i \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} (i k_n \hat{u}_i) \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} (k_n \hat{u}_i) \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \left(k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} + \hat{u}_i \frac{\partial k_n}{\partial k_l} \right) \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \left(k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} + \hat{u}_i \delta_{nl} \right) \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} - \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \delta_{nl} \hat{u}_i \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} - \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_n} \hat{u}_i \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Levando (2.17) em (2.15),

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i - \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} \hat{u}_n + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{1}{\wp} i k_i \hat{p} - \nu (k_n k_n) \hat{u}_i;$$

neste ponto, é conveniente trocar os índices do 3º termo do lado esquerdo:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} \hat{u}_n + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{1}{\wp} i k_i \hat{p} - \nu (k_n k_n) \hat{u}_i. \tag{2.18}$$

2.2.3 A eliminação do termo de pressão

A transformada de Fourier da equação da continuidade (2.7) produz

$$i k_n \hat{U}_n = 0, \quad i k_n \widehat{\langle U \rangle}_n = 0, \quad i k_n \hat{u}_n = 0. \tag{2.19}$$

É conveniente eliminar \hat{p} em (2.18); para isto, multiplique a equação por k_i :

$$\frac{\partial (k_i \hat{u}_i)}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n (k_i \hat{u}_i) - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_i k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} k_i \hat{u}_n + i k_i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{i}{\wp} k_i k_i \hat{p} - \nu (k_n k_n) (k_i \hat{u}_i). \tag{2.20}$$

Em virtude de (2.19), todos os termos contendo $(k_i \hat{u}_i)$ desaparecem, restando

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_i k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} k_i \hat{u}_n + i k_i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i &= -\frac{i}{\wp} k_i k_i \hat{p}, \\
-\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \frac{k_i k_m}{k^2} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} \frac{k_i}{k^2} \hat{u}_n + i \frac{k_i k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_i &= -\frac{i}{\wp} \hat{p}. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Mas

$$k_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} = \frac{\partial}{\partial k_n} (k_i \hat{u}_i) - \hat{u}_i \frac{\partial k_i}{\partial k_n} = -\hat{u}_i \delta_{in} = -\hat{u}_n, \quad (2.22)$$

donde

$$\begin{aligned} + \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \frac{k_m}{k^2} \hat{u}_n + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} \frac{k_i}{k^2} \hat{u}_n + i \frac{k_i k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_i &= -\frac{i}{\wp} \hat{p} \\ 2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \frac{k_m}{k^2} \hat{u}_n + i \frac{k_m k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_m &= -\frac{i}{\wp} \hat{p} \\ 2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{u}_n + i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_m &= -\frac{i}{\wp} k_i \hat{p}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Os dois primeiros termos da primeira linha acima são iguais; eles são reunidos na segunda linha, onde o índice m substituiu i ; multiplicando-se por k_i obtém-se (2.23). Substituindo (2.23) em (2.18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \delta_{im} \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \hat{u}_n + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i &= \\ 2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{u}_n + i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_m - \nu k^2 \hat{u}_i; \\ \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left[k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + 2 \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{u}_n - \delta_{im} \hat{u}_n \right] + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i &= \\ -i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_m + \nu k^2 \hat{u}_i = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

A equação (2.24) é o bloco de construção das equações de balanço de momentos espectrais de ordem n , conforme veremos na seqüência. O seu conjugado é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial t} - \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i^* - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left[k_m \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial k_n} + 2 \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{u}_n^* - \delta_{im} \hat{u}_n^* \right] - i k_n (\hat{u}_n * \hat{u}_i)^* &= \\ + i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} (\hat{u}_n * \hat{u}_m)^* + \nu k^2 \hat{u}_i^* = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

A mesma equação (2.24) com o índice j é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} - \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_j - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left[k_m \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial k_n} + 2 \frac{k_j k_m}{k^2} \hat{u}_n - \delta_{jm} \hat{u}_n \right] + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_j &= \\ -i \frac{k_j k_m k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_m + \nu k^2 \hat{u}_j = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

O truque padrão agora é pós-multiplicar (2.25) por \hat{u}_j , pré-multiplicar (2.26) por \hat{u}_i^* , e somar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial t} \hat{u}_j + \hat{u}_i^* \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} - \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i^* \hat{u}_j + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i^* \hat{u}_j &= \\ - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left[k_m \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial k_n} \hat{u}_j + k_m \hat{u}_i^* \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial k_n} + 2 \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{u}_n^* \hat{u}_j + 2 \frac{k_j k_m}{k^2} \hat{u}_i^* \hat{u}_n - \delta_{im} \hat{u}_n^* \hat{u}_j - \delta_{jm} \hat{u}_i^* \hat{u}_n \right] &= \\ + \left[i k_n \hat{u}_i^* (\hat{u}_n * \hat{u}_j) - i k_n (\hat{u}_n * \hat{u}_i)^* \hat{u}_j \right] &= \\ - \left[\frac{k_j k_m k_n}{k^2} i \hat{u}_i^* (\hat{u}_n * \hat{u}_m) - \frac{k_i k_m k_n}{k^2} i (\hat{u}_n * \hat{u}_m)^* \hat{u}_j \right] + 2 \nu k^2 \hat{u}_i^* \hat{u}_j = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Observe que os termos envolvendo $\langle U_n \rangle_0$ se anulam. A equação ainda pode ser simplificada com a regra da derivada do produto:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j}{\partial t} + \widehat{u}_i^* \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial t} = \frac{\partial (\widehat{u}_i^* \widehat{u}_j)}{\partial t}. \quad (2.28)$$

$$k_m \frac{\partial \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j}{\partial k_n} + k_m \widehat{u}_i^* \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial k_n} = k_m \frac{\partial (\widehat{u}_i^* \widehat{u}_j)}{\partial k_n} \quad (2.29)$$

Utilizando agora a definição do espectro cruzado direcional,

$$\Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j \rangle, \quad (2.30)$$

e sua extensão natural

$$\Phi_{i,jk}(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j \widehat{u}_k \rangle, \quad (2.31)$$

$$\Phi_{ij,k}(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle (\widehat{u}_i \widehat{u}_j)^* \widehat{u}_k \rangle, \quad (2.32)$$

obtém-se a equação para o espectro na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t} - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left[k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} + 2 \left(\frac{k_i k_m}{k^2} \Phi_{n,j} + \frac{k_j k_m}{k^2} \Phi_{i,n} \right) - (\delta_{im} \Phi_{n,j} + \delta_{jm} \Phi_{i,n}) \right] \\ + i k_n [\Phi_{i,nj} - \Phi_{ni,j}] - i \frac{k_n k_m}{k^2} [k_j \Phi_{i,nm} - k_i \Phi_{nm,j}] + 2\nu k^2 \Phi_{i,j} = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.2.4 Médias em $|\mathbf{k}|$ (*shell averages*)

É muitas vezes conveniente ou necessário reduzir a dimensionalidade dos espectros de turbulência de 3 para 1. Isto é feito por meio da definição dos espectros unidimensionais em k :

$$E_{i,j}(k) \equiv \int_{|\mathbf{k}|=k} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k}. \quad (2.34)$$

Existem também os espectros unidimensionais em k_1 :

$$F_{i,j}(k_1) \equiv \int_{k_2 \in \mathbb{R}, k_3 \in \mathbb{R}} \Phi_{i,j}(k_1, k_2, k_3) dk_2 dk_3. \quad (2.35)$$

As suas integrais respectivas produzem os elementos da matriz de covariâncias turbulentas:

$$\langle u_i u_j \rangle = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j} d^3 \mathbf{k} = \int_{k=0}^{\infty} E_{i,j}(k) dk = \int_{k_1=-\infty}^{+\infty} F_{i,j}(k_1) dk_1. \quad (2.36)$$

Em particular, a *energia cinética turbulenta*, $\langle e \rangle$, é dada por

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \langle u_n u_n \rangle = \int_{k=0}^{\infty} E_e(k) dk, \quad (2.37)$$

onde

$$E_e(k) \equiv \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{k}|=k} \Phi_{n,n}(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k}. \quad (2.38)$$

Finalmente, quando a turbulência é isotrópica, valem as seguintes relações entre $E_e(k)$ e $F_{11}(k_1)$:

$$E_e(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_{11}(k)}{dk_1} \right), \quad (2.39)$$

$$F_{11}(k_1) = \int_1^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} E(k_1 x) dx. \quad (2.40)$$

2.2.5 Interpretação física

É importante interpretar os termos de (2.33) da forma mais física que for possível.

$$\bar{\Gamma}_{ij}(\mathbf{k}) = -\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} \quad (2.41)$$

funciona como um termo de *transferência do cisalhamento médio*, redistribuindo $\Phi_{i,j}$ entre os números de onda (Deissler, 1998, p. 224–225). De fato, pode-se mostrar com facilidade que

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \bar{\Gamma}_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = 0. \quad (2.42)$$

Para a prova, basta observar que, por analogia com (2.17),

$$\mathcal{F} \left[r_n \frac{\partial}{\partial r_m} R_{i,j} \right] = -k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n},$$

onde $R_{i,j}(\mathbf{r})$, a função de covariância cruzada, é a transformada inversa de Fourier do espectro cruzado direcional $\Phi_{i,j}$; então,

$$\begin{aligned} r_n \frac{\partial}{\partial r_m} R_{i,j} &= -\mathcal{F}^{-1} \left[k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} \right] \\ &= -\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

e agora (2.42) segue-se de (2.43) avaliada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

O termo

$$\bar{\Pi}_{ij}(\mathbf{k}) = -2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left(\frac{k_i k_m}{k^2} \Phi_{n,j} + \frac{k_j k_m}{k^2} \Phi_{i,n} \right) \quad (2.44)$$

é a parte linear da interação entre a pressão e a velocidade no espaço de fase (veja a equação (2.23)). Claramente, ele é parcialmente responsável pela redistribuição de covariância $\langle u_i u_j \rangle$ entre as 3 direções do espaço. Por exemplo, multiplicando-se (2.30) por k_i ou k_j e utilizando-se a equação da continuidade (2.19), obtém-se

$$k_i \Phi_{i,j} = k_j \Phi_{i,j} = 0; \quad (2.45)$$

portanto, é imediato que

$$\bar{\Pi}_{ii} = 0. \quad (2.46)$$

No entanto, não parece possível fazer nenhuma afirmação geral sobre

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \bar{\Pi}_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} :$$

por exemplo, em (Deissler, 1998, p. 228), observa-se que em um particular escoamento com cisalhamento médio unidirecional $d \langle U_1 \rangle / dx_3$, $\bar{\Pi}_{11} < 0$ sempre, $\bar{\Pi}_{22} > 0$ sempre, e que $\bar{\Pi}_{33}$ troca de sinal com o tempo: ele é inicialmente positivo e depois se torna negativo.

O termo de produção por interação com o gradiente de velocidade média é

$$\bar{\Upsilon}_{i,j}(\mathbf{k}) = \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} (\delta_{im} \Phi_{n,j} + \delta_{jm} \Phi_{i,n}), \quad (2.47)$$

cuja integral em \mathbf{k} é

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \bar{\Upsilon}_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \delta_{im} \langle u_n u_j \rangle + \delta_{jm} \langle u_i u_n \rangle. \quad (2.48)$$

O termo de transferência inercial é

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) = ik_n [\Phi_{i,nj} - \Phi_{ni,j}]. \quad (2.49)$$

Note que, assim como $\Phi_{i,j}$, Γ_{ij} é hermitiano:

$$\Gamma_{ji}(\mathbf{k}) = \Gamma_{ij}^*(\mathbf{k}). \quad (2.50)$$

Desejo mostrar que

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = 0. \quad (2.51)$$

Para isto, recuperemos a origem de (2.49) em (2.31)–(2.32), e na terceira linha de (2.27):

$$\begin{aligned} ik_n \widehat{u}_i^* (\widehat{u}_n * \widehat{u}_j) &= i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) d^3\mathbf{l} \\ &= i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) d^3\mathbf{l}; \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$ik_n (\widehat{u}_n * \widehat{u}_i)^* \widehat{u}_j = i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n \widehat{u}_n^*(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}) d^3\mathbf{l}, \quad (2.53)$$

ou seja: (2.49) tem origem em

$$ik_n \widehat{u}_i^* (\widehat{u}_n * \widehat{u}_j) - ik_n (\widehat{u}_n * \widehat{u}_i)^* \widehat{u}_j,$$

cuja integral em \mathbf{k} será

$$\begin{aligned} &i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n [\widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) - \widehat{u}_n^*(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{k})] d^3\mathbf{l} d^3\mathbf{k} = \\ &i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n [\widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) - \widehat{u}_n(\mathbf{l} - \mathbf{k}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{k})] d^3\mathbf{l} d^3\mathbf{k} = \\ &i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} [k_n - l_n] \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) d^3\mathbf{l} d^3\mathbf{k} = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

(note a troca de \mathbf{k} com \mathbf{l} no segundo termo dentro do colchete na 2ª linha, e o uso da equação da continuidade (2.19) na última linha acima), o que prova (2.51). Note portanto que Γ_{ij} somente redistribui a covariância $\langle u_i u_j \rangle$ entre os vetores número de onda \mathbf{k} de $\Phi_{i,j}$, sem jamais trocá-la com outros espectros cruzados. Este é o mesmo papel do termo de transferência pelo cisalhamento médio $\bar{\Gamma}_{i,j}$.

Também é possível definir um termo unidimensional (em k) de transferência:

$$T_{ij}(k) \equiv \int_{|\mathbf{k}|=k} \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) d^2\mathbf{k}. \quad (2.55)$$

Finalmente, o termo de redistribuição direcional de energia pelas correlações pressão-velocidade é

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}) = -i \frac{k_n k_m}{k^2} [k_j \Phi_{i,nm} - k_i \Phi_{nm,j}]. \quad (2.56)$$

Da mesma forma que ocorre com $\bar{\Pi}_{ij}$, não é (nem deve ser!) possível provar um resultado geral sobre a integral de Π_{ij} em \mathbf{k} . Note entretanto que $\Pi_{ii}(\mathbf{k}) \equiv 0$; de fato,

$$k_i \phi_{i,nm} = k_i \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle \widehat{u}_i^* \widehat{u}_n \widehat{u}_m \rangle = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle (k_i \widehat{u}_i)^* \widehat{u}_n \widehat{u}_m \rangle = 0. \quad (2.57)$$

2.2.6 Produção e dissipação de energia cinética turbulenta

A contração $i = j$ de (2.33) produz a equação de evolução da energia cinética turbulenta:

$$\frac{\partial \Phi_{i,i}}{\partial t} + \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} (\Phi_{n,m} + \Phi_{m,n}) + ik_n (\Phi_{i,ni} - \Phi_{ni,i}) + 2\nu k^2 \Phi_{i,i} = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial 2\Phi_e}{\partial t} + \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} (\Phi_{n,m} + \Phi_{m,n}) + ik_n (\Phi_{i,ni} - \Phi_{ni,i}) + 2\nu k^2 (2\Phi_e) = 0. \quad (2.59)$$

Em virtude de (2.49), (2.51) e (2.36), a integral em \mathbf{k} de (2.59) é

$$\frac{\partial}{\partial t} (2e) + 2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \langle u_m u_n \rangle + 2\epsilon_e = 0. \quad (2.60)$$

A dissipação de covariância é dada por

$$\epsilon_{ij} = 2 \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \nu k^2 \Phi_{i,j}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = 2 \int_{k=0}^{\infty} k^2 E_{i,j}(k) dk; \quad (2.61)$$

em particular,

$$\epsilon_e = \frac{1}{2} \epsilon_{ii} = 2 \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \nu k^2 \left(\frac{\Phi_{i,i}(\mathbf{k})}{2} \right) d^3 \mathbf{k} = 2\nu \int_{k=0}^{\infty} k^2 E_e(k) dk. \quad (2.62)$$

A taxa de dissipação de energia cinética turbulenta pode ser usada para definir as *microescalas de Kolmogorov* de comprimento e de tempo:

$$r_\epsilon = \nu^{3/4} \epsilon_e^{-1/4}, \quad (2.63)$$

$$t_\epsilon = \nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2}. \quad (2.64)$$

Capítulo 3

Modelos espectrais de fechamento para o termo de transferência inercial

3.1 Introdução

Modelos de fechamento relativamente simples podem ser propostos para todos os espectros de ordem 3 cujas integrais em \mathbf{k} se anulam. A idéia geral é escrever estes modelos de fechamento na forma

$$T(k) = \frac{\partial}{\partial k} [g(k)E(k)], \quad (3.1)$$

onde $E(k)$ é um espectro qualquer, $T(k)$ é a sua função de transferência inercial, e $g(k)$ define o particular modelo de fechamento escolhido. Para maiores detalhes, veja o apêndice A.

Note que estamos contando com o fato de que $E(\pm\infty) \rightarrow 0$ suficientemente rápido para garantir que a integral em k de $T(k)$ se anule. A analogia com (2.41) pode ser um bom guia. Sabendo que, dimensionalmente:

$$[\epsilon_e] = \mathbb{L}^2\mathbb{T}^{-3}, \quad [k] = \mathbb{L}^{-1}, \quad (3.2)$$

posso construir uma escala inversa de tempo análoga a $\partial \langle u_m \rangle / \partial x_n$:

$$\mathbb{T}^{-1} = \left[\left[\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \right] \right] = [k^{2/3} \epsilon^{1/3}]. \quad (3.3)$$

Um modelo de fechamento dimensionalmente consistente, e inspirado por (2.41), pode ser da forma

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial}{\partial k_n} [(k^{2/3} \epsilon^{1/3}) k_m \Phi_{i,j}]$$

ou, em uma dimensão:

$$T(k) = \frac{\partial}{\partial k} [k^{5/3} \epsilon^{1/3} E(k)], \quad (3.4)$$

— onde ϵ é a taxa de dissipação genérica correspondente a $E(k)$ — que vem a ser *exatamente* (a menos da constante de Kolmogorov, α) o modelo proposto por Pao (1965)! Aparentemente, Pao utilizou as equações de turbulência isotrópica, mas impôs uma condição de regime permanente (ver Pao (1965), p. 1066, texto após a eq. (2.9)), o que é contraditório, já que turbulência isotrópica sem um forçante artificialmente introduzido nas equações de Navier-Stokes não pode se manter, e sempre decai.

O análogo mais simples das equações (2.33) de balanço espectral que podemos conceber é obtido eliminando-se todos os termos que envolvem cisalhamento médio, produção por interação com este cisalhamento, etc., e adotando como única função de transferência a equação (3.4) (isto

é: eliminando o efeito das correlações entre pressão e velocidade); isto é estritamente correto para o espectro da energia cinética turbulenta. A equação de balanço espectral de energia cinética turbulenta com o fechamento de Pao é

$$\frac{\partial E_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial k} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} E_e] + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (3.5)$$

3.2 A formulação original de Pao

Pao (1965) propôs $\partial E_e / \partial t = 0$ (o que está errado, como comentamos) e introduziu a constante α de Kolmogorov explicitamente no modelo de fechamento:

$$\frac{d}{dk} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} E_e] + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (3.6)$$

Observe a derivada ordinária, já que o problema não depende mais do tempo. A solução prossegue ao longo das linhas clássicas:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} \frac{dE_e}{dk} + \frac{5}{3} \alpha^{-1} k^{2/3} \epsilon_e^{1/3} E_e + 2\nu k^2 E_e &= 0, \\ \frac{dE_e}{dk} + \left[\frac{5}{3} k^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \right] E_e &= 0, \\ \frac{dE_e}{E_e} &= - \left[\frac{5}{3} k^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \right] dk, \\ \ln \frac{E_e}{E_{e0}} &= -\frac{5}{3} \ln k - \frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} \\ E_e &= E_{e0} k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Neste ponto, para calcular E_{e0} basta usar a condição de que a dissipação ϵ_e é dada por

$$\epsilon_e = \int_0^\infty 2\nu k^2 E_e(k) dk = \frac{\epsilon_e^{1/3} E_{e0}}{\alpha} \Rightarrow E_{e0} = \alpha \epsilon_e^{2/3}. \quad (3.8)$$

O resultado é o espectro clássico de Kolmogorov, mais uma expressão explícita (um decaimento exponencial) para a faixa de dissipação:

$$E_e = \alpha \epsilon_e^{2/3} k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} \right]. \quad (3.9)$$

Uma lição importante é que, provavelmente, nenhum modelo espectral pode dispensar uma restrição integral do tipo (3.8).

3.2.1 Discussão:

Visto pelo ângulo que apresentei aqui, o modelo de fechamento de Pao é quase uma dedução independente da lei dos 5/3: ele é sugerido pelas equações dinâmicas (basicamente Navier-Stokes) em que existe um cisalhamento médio, e onde portanto há uma escala de tempo $\partial \langle u_m \rangle / \partial x_n$ explícita; em seguida, ele é adaptado para a transferência inercial com base em duas idéias: (i) o modelo de fechamento pode ser formulado em termos de uma derivada d/dk ; e (ii) na ausência de uma escala de tempo macroscópica, podemos usar ϵ_e e k para construir uma escala de tempo alternativa. Note que (ii) é muito parecida com as idéias usadas por Kolmogorov, mas que agora, como usamos as equações da dinâmica, existe uma previsão um pouco mais ampla (uma forma explícita para a faixa de dissipação do espectro — que segundo Davidson (2004) é uma das poucas previsões fisicamente razoáveis e compatíveis com a evidência experimental).

3.2.2 O cálculo de uma integral elementar

Primeiramente, note que o espectro de Pao pode ser escrito

$$E_e(k) = E_{e0} k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (r_\epsilon k)^{4/3} \right], \quad (3.10)$$

que é apenas uma maneira mais compacta de escrever a mesma coisa. Este tipo de manipulação, embora supérfluo do ponto de vista estritamente matemático, sempre ajuda a colocar a física em perspectiva, e em geral simplifica um pouco a álgebra também. O cálculo da dissipação fica

$$\epsilon_e = E_{e0} \int_0^\infty 2\nu k^{1/3} e^{-\frac{3\alpha}{2} (r_\epsilon k)^{4/3}} dk. \quad (3.11)$$

A mudança de variável óbvia é (note que u é uma variável auxiliar de integração, e não deve ser confundida com a velocidade do escoamento)

$$u = (r_\epsilon k)^{4/3}, \quad (3.12)$$

$$k = \frac{u^{3/4}}{r_\epsilon}, \quad (3.13)$$

$$k^{1/3} = \frac{u^{1/4}}{r_\epsilon^{1/3}}, \quad (3.14)$$

$$dk = \frac{3u^{-1/4}}{4r_\epsilon} du \quad (3.15)$$

e a dissipação agora é

$$\begin{aligned} \epsilon_e &= E_{e0} \int_0^\infty 2\nu \frac{u^{1/4}}{r_\epsilon^{1/3}} \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} u \right] \frac{3u^{-1/4}}{4r_\epsilon} du \\ &= \frac{E_{e0} \nu r_\epsilon^{-4/3}}{\alpha} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{3\alpha u}{2} \right] \frac{3\alpha}{2} du \\ &= \frac{E_{e0} \nu \epsilon_e^{1/3}}{\alpha \nu}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3 O modelo de Lin (1972) para o espectro de energia cinética turbulenta

Uma modificação importante é a inclusão do efeito de “gargalo” (*bottleneck effect*) no espectro de energia cinética turbulenta. Tanto quanto seja de meu conhecimento, há muito pouco de explicações teóricas sobre o efeito, a não ser no caso de espectros de escalares onde a explicação padrão aceita (razão entre a difusividade molecular de *momentum* e do escalar muito diferente de 1) é a teoria de Batchelor para as regiões inercial-difusiva e advectiva-viscosa (Batchelor, 1959; Batchelor et al., 1959).

Hill (1978) introduziu diversos modelos que são capazes de reproduzir a “corcova” observada no espectro no fim da região inercial, e aplicou-os a espectros de escalares de acordo com a teoria padrão de Batchelor. Entretanto, o efeito é claramente observável em espectros de energia cinética turbulenta medidos em túneis de vento (Saddoughi e Veeravallis, 1994; Saddoughi, 1997; Kang et al., 2003) e também em simulações numéricas diretas de turbulência (Lamorgese et al., 2005) onde há apenas *uma* difusividade molecular em ação (a viscosidade cinemática do próprio fluido), e nada nos impede *a priori* de aplicar o modelo proposto por Hill ao espectro de energia cinética turbulenta.

O modelo de [Lin \(1972\)](#) baseia-se na inclusão de uma segunda escala de tempo a $g(k)$ no termo de transferência inercial. Note que no modelo original de Pao,

$$g(k) = \frac{k}{\alpha_e t_k}, \quad (3.17)$$

$$t_k = k^{2/3} \epsilon_e^{1/3}. \quad (3.18)$$

Alternativamente, Lin propôs

$$g(k) = \frac{\alpha_e^{-1} k}{t_k + q t_\epsilon} = \frac{1}{\alpha_e} \frac{k}{\epsilon_e^{-1/3} k^{-2/3} + q^{2/3} \nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2}} = \frac{\alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3}}{1 + q^{2/3} \nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/6} k^{2/3}}, \quad (3.19)$$

com $q = 1$; o parâmetro de ajuste $q^{2/3}$ é uma generalização posteriormente introduzida por [Hill \(1978\)](#).

Utilizando-se a definição da microescala de Kolmogorov (2.63),

$$g(k) = \alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3} [(qr_\epsilon k)^{2/3} + 1]^{-1}. \quad (3.20)$$

Para este modelo, a equação de balanço espectral de energia cinética turbulenta (3.6) com $\partial E_e(k)/\partial t = 0$ é

$$\frac{d}{dk} \left[\alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} ((qr_\epsilon k)^{2/3} + 1)^{-1} E_e \right] + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (3.21)$$

Usando o “espectro compensado”

$$E_C(k) \equiv k^{5/3} E_e(k), \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(1 + (qr_\epsilon k)^{2/3}\right) \frac{dE_C}{dk} - \frac{\frac{2}{3}(qr_\epsilon k)^{-1/3}(qr_\epsilon)}{(1 + (qr_\epsilon k)^{2/3})^2} E_C \right] + 2\nu k^{1/3} E_C, \\ \frac{dE_C}{E_C} &= \frac{2}{3} \left(1 + (qr_\epsilon k)^{2/3}\right)^{-1} (qr_\epsilon k)^{-1/3} (qr_\epsilon) dk - 2\alpha \nu \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \left(1 + (qr_\epsilon k)^{2/3}\right) dk \\ \frac{dE_C}{E_C} &= \frac{2}{3} \left(1 + (qr_\epsilon k)^{2/3}\right)^{-1} (qr_\epsilon k)^{-1/3} d(qr_\epsilon k) - 2\alpha q^{-4/3} (qr_\epsilon k)^{1/3} \left(1 + (qr_\epsilon k)^{2/3}\right) d(qr_\epsilon k) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + x^{2/3}\right)^{-1} x^{-1/3} dx - 2\alpha q^{-4/3} x^{1/3} \left(1 + x^{2/3}\right) dx, \end{aligned} \quad (3.23)$$

para

$$x \equiv qr_\epsilon k. \quad (3.24)$$

As integrais são elementares:

$$\ln \frac{E_C}{E_{C0}} = \ln (x^{2/3} + 1) - \alpha q^{-4/3} \left(x^2 + \frac{3}{2} x^{4/3} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} E_e(k) &= E_{C0} k^{-5/3} (x^{2/3} + 1) \exp \left[-\alpha q^{-4/3} \left(x^2 + \frac{3}{2} x^{4/3} \right) \right] \\ &= E_{C0} (qr_\epsilon)^{5/3} (x^{-1} + x^{-5/3}) \exp \left[-\alpha q^{-4/3} \left(x^2 + \frac{3}{2} x^{4/3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A constante E_{C0} é obtida por meio da integral de dissipação (3.8):

$$\int_{k=0}^{\infty} 2\nu(qr_{\epsilon}k)^2(qr_{\epsilon})^{-2}E_{C0}(qr_{\epsilon})^{5/3}(x^{-1}+x^{-5/3})\exp\left[-\alpha q^{-4/3}\left(x^2+\frac{3}{2}x^{4/3}\right)\right]dk = \epsilon_e,$$

$$\nu E_{C0}(r_{\epsilon})^{-4/3}\int_{x=0}^{\infty} 2\alpha q^{-4/3}(x+x^{1/3})\exp\left[-\alpha q^{-4/3}\left(x^2+\frac{3}{2}x^{4/3}\right)\right]dx = \alpha\epsilon_e. \quad (3.26)$$

A mudança de variável

$$u = \alpha q^{-4/3}\left(x^2 + \frac{3}{2}x^{4/3}\right) \quad (3.27)$$

produz (novamente) a integral elementar

$$\nu E_{C0}r_{\epsilon}^{-4/3}\int_0^{\infty} e^{-u}du = \alpha\epsilon_e,$$

$$E_{C0} = \frac{\alpha\epsilon_e r_{\epsilon}^{4/3}}{\nu} = \alpha\epsilon_e^{-2/3}. \quad (3.28)$$

O espectro compensado adimensional do modelo de Lin é

$$\epsilon_e^{2/3}k^{-5/3}E_e(r_{\epsilon}k) = \alpha_e\left((qr_{\epsilon}k)^{2/3}+1\right)\exp\left[-\alpha q^{-4/3}\left((qr_{\epsilon}k)^2+\frac{3}{2}(qr_{\epsilon}k)^{4/3}\right)\right]. \quad (3.29)$$

O uso de um modelo alternativo ao de Pao para reproduzir a “corcova” do espectro compensado requer a capacidade de calibrar o modelo para ajustar o valor de $r_{\epsilon}k$ em que ocorre o máximo desta corcova. Nos espectros unidimensionais compensados de [Saddoughi \(1997\)](#) e [Kang et al. \(2003\)](#), este máximo ocorre em na faixa $10^{-2} < r_{\epsilon}k_1 < 10^{-1}$. Nossas tentativas de calibração mostraram que o máximo da corcova só pode ser posicionado em $r_{\epsilon}k_1$ ao preço de um valor absurdamente alto ($q = 10$). Em resumo, o modelo original de Lin, mesmo com a “generalização” $q \neq 1$, não é suficientemente flexível para reproduzir corretamente a corcova do espectro compensado.

3.3.1 Primeira tentativa de generalizar o modelo de Lin

Considere então a próxima generalização óbvia do modelo de Lin:

$$g(k) = \alpha_e^{-1}\epsilon_e^{1/3}k^{5/3}\left[(qr_{\epsilon}k)^{2b/3}+1\right]^{-1}. \quad (3.30)$$

Prosseguindo em paralelo com o caso anterior:

$$0 = \frac{d}{dk}\left[\alpha^{-1}\epsilon_e^{1/3}(1+x^{2b/3})^{-1}E_C\right] + 2\nu k^{1/3}E_C,$$

$$0 = \frac{d}{dx}\left[(1+x^{2b/3})^{-1}E_C\right] + 2\alpha_e(q)^{-4/3}x^{1/3}E_C,$$

$$0 = \left[\frac{1}{1+x^{2b/3}}\frac{dE_C}{dx} - \frac{2b}{3}\frac{x^{2b/3-1}}{(1+x^{2b/3})^2}E_C\right] + 2\alpha_e(q)^{-4/3}x^{1/3}E_C,$$

$$0 = \frac{dE_C}{dx} - \frac{2b}{3}\frac{x^{2b/3-1}}{1+x^{2b/3}}E_C + 2\alpha_e(q)^{-4/3}(1+x^{2b/3})x^{1/3}E_C,$$

$$\frac{dE_C}{E_C} = \frac{2b}{3}\frac{x^{2b/3-1}}{1+x^{2b/3}}dx - 2\alpha_e(q)^{-4/3}(1+x^{2b/3})x^{1/3}dx. \quad (3.31)$$

As integrais são elementares:

$$\ln\frac{E_C}{E_{C0}} = \ln(x^{2b/3}+1) - 2\alpha q^{-4/3}\left(\frac{3}{4}x^{4/3} + \text{Lin}(x)\right), \quad (3.32)$$

onde

$$\text{Lin}(x) = \begin{cases} \frac{3}{2b+4}x^{\frac{2b+4}{3}}, & b \neq -2, \\ \ln x, & b = -2. \end{cases} \quad (3.33)$$

O espectro compensado é

$$E_C(x) = \alpha_e \epsilon_e^{2/3} [x^{2b/3} + 1] \exp \left[-2\alpha_e q^{-4/3} \left(\frac{3}{4}x^{4/3} + \text{Lin}(x) \right) \right]. \quad (3.34)$$

Como sempre, a constante $E_{C0} = \alpha_e \epsilon_e^{2/3}$ é obtida por meio da integral de dissipação (3.8); o cálculo é elementar, e os detalhes foram omitidos.

A introdução do segundo parâmetro torna o ajuste de dados experimentais mais flexível. A figura 3.1 mostra que é possível obter um ajuste razoável aos dados de Kang et al. (2003) com $q = 4,0$ e $b = 1,5$. Para se obter um ajuste melhor, é necessário utilizar um algoritmo automático de otimização. No entanto, o cálculo do espectro unidimensional $F_{11}(r_\epsilon k_1)$ é feito utilizando integração numérica para o cálculo de (2.40): o resultado é uma rotina demasiadamente lenta em um computador de mesa para que o recálculo de (q, b) possa ser feito automaticamente. Expressões analíticas para F_{11} estão sendo desenvolvidas para superar este obstáculo.

3.3.2 Segunda tentativa de generalizar o modelo de Lin

Uma característica evidente de (3.30) é que $g(k)$ se torna muito pequeno quando $x \rightarrow \infty$. Uma maneira de controlar a diminuição de $g(k)$ é

$$g(k) = \alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3} \frac{1 + (qr_\epsilon k)^{2/3}}{1 + (1 + \Delta)(qr_\epsilon k)^{2/3}}. \quad (3.35)$$

Do ponto de vista da análise dimensional, (3.35) é tão válido quanto (3.20) ou (3.30). Em particular, note que

$$\lim_{(qr_\epsilon k) \rightarrow 0} g(k) = \alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3}, \quad (3.36)$$

$$\lim_{(qr_\epsilon k) \rightarrow \infty} g(k) = [(1 + \Delta)\alpha_e]^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3}. \quad (3.37)$$

Prosseguindo em paralelo com o caso anterior:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dk} \left[\alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} \frac{1 + x^{2/3}}{1 + (1 + \Delta)x^{2/3}} E_C \right] + 2\nu k^{1/3} E_C, \\ 0 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1 + x^{2/3}}{1 + (1 + \Delta)x^{2/3}} E_C \right] + 2\alpha_e (q)^{-4/3} x^{1/3} E_C, \\ 0 &= \left[\frac{1 + x^{2/3}}{1 + (1 + \Delta)x^{2/3}} \frac{dE_C}{dx} - \frac{2\Delta}{3} \frac{x^{-1/3}}{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})^2} E_C \right] + 2\alpha_e (q)^{-4/3} x^{1/3} E_C, \\ 0 &= \frac{dE_C}{dx} - \frac{2\Delta}{3} \frac{x^{-1/3}}{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})(1 + x^{2/3})} E_C + 2\alpha_e (q)^{-4/3} \frac{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})x^{1/3}}{1 + x^{2/3}} E_C, \\ \frac{dE_C}{E_C} &= \frac{x^{-1/3}}{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})(1 + x^{2/3})} dx - 2\alpha_e (q)^{-4/3} \frac{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})x^{1/3}}{1 + x^{2/3}} dx \end{aligned} \quad (3.38)$$

As integrais são elementares (e foram calculadas com o auxílio da linguagem de processamento simbólico MAXIMA; vide <http://www.freshmeat.net/projects/maxima>):

$$\ln \frac{E_C}{E_{C0}} = \ln \frac{1 + (1 + \Delta)x^{2/3}}{1 + x^{2/3}} - 2\alpha_e q^{-4/3} \left[\frac{3}{4}(1 + \Delta)x^{4/3} - \frac{3\Delta}{2}x^{2/3} + \frac{3\Delta}{2} \ln(x^{2/3} + 1) \right]. \quad (3.39)$$

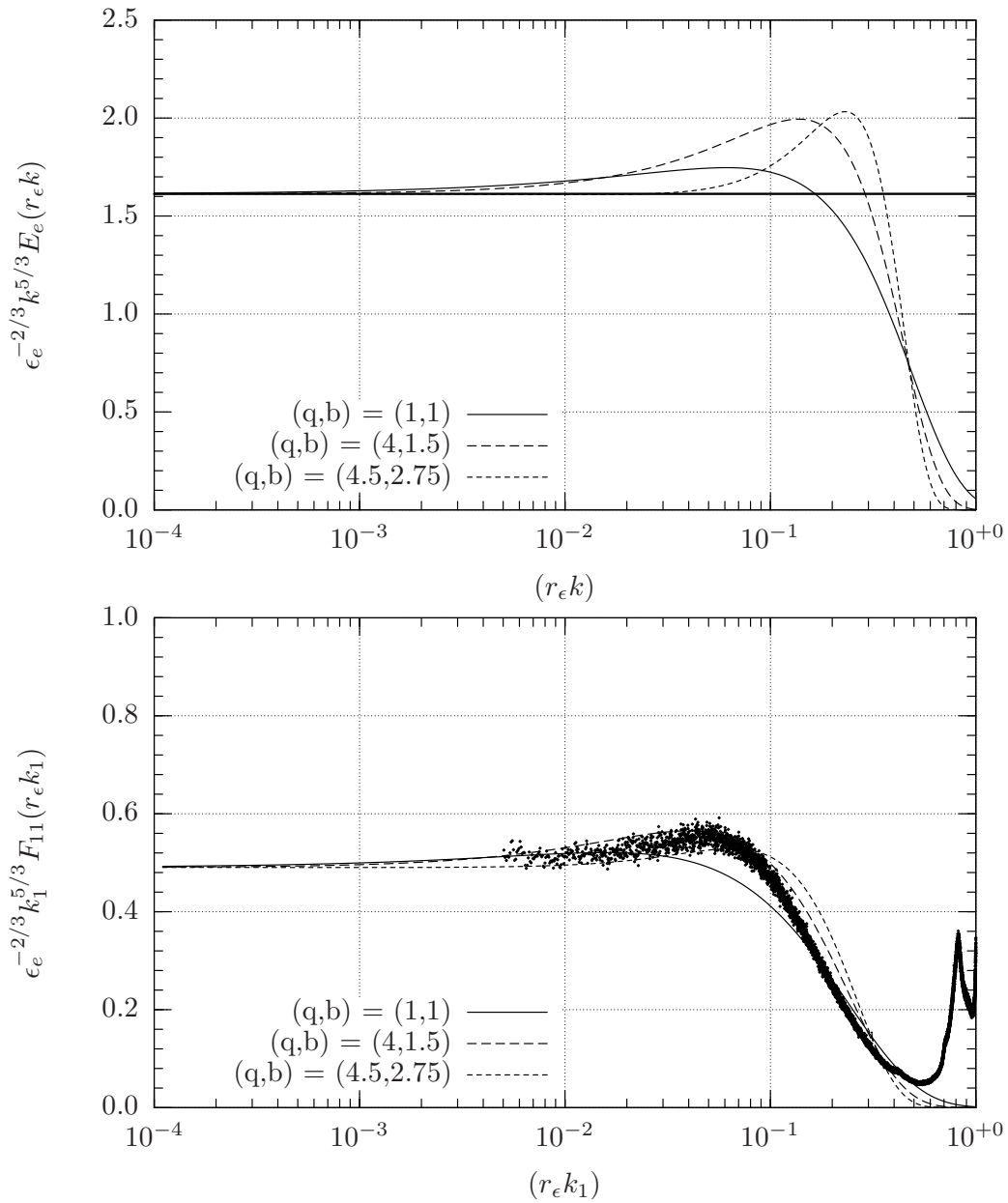


Figura 3.1: Espectros compensados de Pao-Lin com um segundo parâmetro

O espectro compensado é

$$E_C(x) = E_{C0} \left[\frac{1 + (1 + \Delta)x^{2/3}}{1 + x^{2/3}} \right] \exp \left[-2\alpha_e q^{-4/3} \left(\frac{3}{4}(1 + \Delta)x^{4/3} - \frac{3\Delta}{2}x^{2/3} + \frac{3\Delta}{2} \ln(x^{2/3} + 1) \right) \right]. \quad (3.40)$$

A condição de dissipação é

$$2 \int_0^\infty q^{-4/3} x^{1/3} E_C(x) dx = \epsilon_e^{2/3}. \quad (3.41)$$

De maneira quase surpreendente, a mesma manipulação algébrica do modelo original de Pao continua funcionando:

$$u = \frac{3}{4}(1 + \Delta)x^{4/3} - \frac{3\Delta}{2}x^{2/3} + \frac{3\Delta}{2} \ln(x^{2/3} + 1) \Rightarrow \quad (3.42)$$

$$du = \frac{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3}) x^{1/3}}{1 + x^{2/3}} dx, \quad (3.43)$$

de forma que a integral de dissipação torna-se

$$E_{C0} \int_0^\infty 2\alpha_e q^{-4/3} \exp[-2\alpha_e q^{-4/3} u] du = \alpha_e \epsilon_e^{2/3} \Rightarrow E_{C0} = \alpha_e \epsilon_e^{2/3}. \quad (3.44)$$

3.4 Um modelo modificado Pao-Hill para a energia cinética turbulenta

Hill (1978) propôs alguns modelos adicionais similares ao de Lin. Na seqüência, nós vamos descrever em detalhes o seu “modelo 2”. Ele se baseia na seguinte equação diferencial para $g(k)$:

$$\frac{d \ln g(k)}{dz} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} [1 + \operatorname{tgh}(az)]. \quad (3.45)$$

onde $g(k)$ é a função de definição do modelo de fechamento introduzida em (3.1), e

$$z \equiv \ln \frac{k}{k^*}; \quad (3.46)$$

k^* é um número de onda típico da região onde ocorre a corcova no espectro. Os parâmetros adicionais do modelo de Hill são a e k^* .

Os seguintes comportamentos assintóticos do modelo de Hill para a inclinação ζ de $\ln E_e \times \ln k$ são facilmente verificáveis:

$$\begin{array}{lll} k \ll k^* \Rightarrow z \rightarrow -\infty & \Rightarrow \operatorname{tgh}(az) \rightarrow -1 & \zeta = -5/3 \\ k \sim k^* \Rightarrow z \sim 0 & \Rightarrow \operatorname{tgh}(az) \sim 0 & \zeta = -4/3 \\ k \gg k^* \Rightarrow z \rightarrow +\infty & \Rightarrow \operatorname{tgh}(az) \rightarrow +1 & \zeta = -1 \end{array}$$

A integração do termo envolvendo a tangente hiperbólica é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int [1 + \operatorname{tgh}(az)] dz &= \int \left[1 + \frac{\operatorname{senh}(az)}{\operatorname{cosh}(az)} \right] dz \\ &= \int \frac{\operatorname{cosh}(az) + \operatorname{senh}(az)}{\operatorname{cosh}(az)} dz \\ &= \int \frac{2e^{az}}{e^{az} + e^{-az}} dz \end{aligned} \quad (3.47)$$

Fazendo

$$u = e^{az} \Rightarrow dz = \frac{1}{a} \frac{du}{u}, \quad (3.48)$$

a integral transforma-se em

$$\frac{1}{a} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du = \frac{1}{a} \ln(u^2 + 1). \quad (3.49)$$

Levando este último resultado em (3.45):

$$\begin{aligned} \ln g(k) &= \frac{5}{3} \ln \frac{k}{k^*} - \frac{1}{3a} \ln \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right] + \ln C, \\ g(k) &= C \left(\frac{k}{k^*} \right)^{5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Em princípio, nós deveríamos agora resolver uma equação de balanço espectral de energia cinética turbulenta análoga a (3.5) com $g(k)$ dado por (3.50), e em seguida impor a restrição global de dissipação de energia cinética turbulenta (3.8) para então calcular C . Um caminho mais curto é simplesmente admitir o espectro de Kolmogorov na faixa inercial e impor que o fluxo espectral de energia cinética turbulenta (dado pela derivada de $T(k)$: ver (3.1)) seja igual a ϵ_e nesta faixa:

$$\begin{aligned} g(k)E_e(k) &= \epsilon_e, \\ C \left(\frac{k}{k^*} \right)^{5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} E_e(k) &= \epsilon_e, \\ C \left(\frac{k}{k^*} \right)^{5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} \alpha \epsilon_e^{2/3} k^{-5/3} &= \epsilon_e, \\ C &= \frac{\epsilon_e^{1/3}}{\alpha} k^{*5/3}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde

$$g(k) = \frac{1}{\alpha} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}}. \quad (3.52)$$

É importante observar que o resultado de dissipação ainda deve ser verificado *a posteriori* quando tivermos obtido uma equação completa para $E_e(k)$. A equação diferencial de balanço espectral de energia cinética turbulenta agora é (sob a mesma aproximação de Pao de desprezar o termo transiente)

$$\frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} k^{5/3} E_e(k) \right\} + 2\nu k^2 E_e(k) = 0; \quad (3.53)$$

$$\frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} E_C(k) \right\} + 2\nu k^{1/3} E_C(k) = 0,$$

$$\alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} \frac{dE_C}{dk} - \frac{2}{3} \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \frac{1}{k^*} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}-1} E_C + 2\nu k^{1/3} E_C = 0. \quad (3.54)$$

Separando as variáveis,

$$\frac{dE_C}{E_C} = \frac{1}{3a} \frac{2ax^{2a-1}}{x^{2a} + 1} dx - 2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx \quad (3.55)$$

onde

$$x = \frac{k}{k^*}. \quad (3.56)$$

A integral é

$$\ln \frac{E_C(k)}{E_{C0}} = \frac{1}{3a} \ln \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right] - 2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \int_1^{k/k^*} x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx \quad (3.57)$$

Note o aparecimento da função $\text{Hil}(x, 1/3, a)$ definida no apêndice E, equação (E.1); obtém-se o espectro (a menos de uma constante de integração a ser calculada):

$$k^{5/3} E_e(k) = E_{C0} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[-2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \text{Hil}(k/k^*, 1/3, a) \right]. \quad (3.58)$$

A condição integral de dissipação equivalente a (3.8) do modelo de Pao é

$$\begin{aligned} \epsilon_e &= \int_0^\infty 2\nu k^2 E_e(k) dk \\ &= \int_0^\infty \frac{2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3}}{\alpha\epsilon_e^{-1/3}} E_{C0} k^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[-2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{4/3} \text{Hil}(k/k^*, 1/3, a) \right] dk \\ &= \frac{2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{4/3}}{\alpha\epsilon_e^{-1/3}} E_{C0} \int_{x=0}^\infty x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} \exp \left[-2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{4/3} \text{Hil}(x, 1/3, a) \right] dx \\ &= \frac{E_{C0}}{\alpha\epsilon_e^{-1/3}} \int_{x=0}^\infty \exp \left[-2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \text{Hil}(x, 1/3, a) \right] 2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \frac{d\text{Hil}(x, 1/3, a)}{dx} dx \\ &= \frac{E_{C0}}{\alpha\epsilon_e^{-1/3}} \exp \left(-2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \text{Hil}(0, 1/3, a) \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Portanto,

$$E_{C0} = \alpha\epsilon_e^{2/3} \exp \left(2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \text{Hil}(0, 1/3, a) \right). \quad (3.60)$$

O espectro de energia cinética decorrente da aplicação do modelo 2 de Hill, finalmente, é dado por

$$E_e(k) = \alpha\epsilon_e^{2/3} k^{-5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \left(\text{Hil}(0, 1/3, a) - \text{Hil}(k/k^*, 1/3, a) \right) \right]. \quad (3.61)$$

O espectro compensado e adimensionalizado torna-se

$$\epsilon_e^{-2/3} k^{5/3} E_e(r_\epsilon k) = \alpha \left[\left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \left(\text{Hil}(0, 1/3, a) - \text{Hil}\left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*}, 1/3, a\right) \right) \right] \quad (3.62)$$

A figura 3.2 mostra o resultado de E_e para $a = 1,75$ e $r_\epsilon k^* = 0,075$.

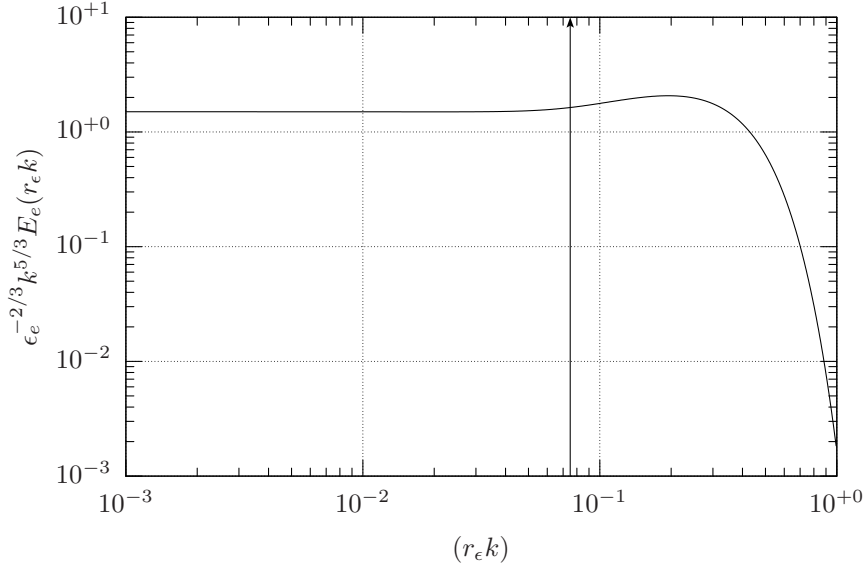


Figura 3.2: Espectro compensado e adimensional de Pao-Hill: $a = 1,75$ e $(r_e k^*) = 0,075$ (seta vertical). O platô vale $\alpha = 1,5$.

3.5 Um modelo de fechamento Pao com produção proporcional a S em regime permanente

O desprezo do termo transiente na formulação de Pao carrega um preço alto: ao contrário do comportamento correto do espectro de energia cinética turbulenta, $E_e(k=0) = 0$, o espectro mantém-se “para sempre” na região inercial enquanto $k \downarrow 0$. Isto é claramente não-físico, e nós vamos agora tentar introduzir uma modificação que produza uma solução mais realista fisicamente. A única maneira de fazer isto é introduzindo um termo que produza continuamente $\langle e \rangle$, de forma que nós modificamos (um tanto arbitrariamente) a equação espectral de balanço para

$$-S E_e + \frac{d}{dk} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} E_e] + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (3.63)$$

Comparando (3.63) com (3.5), é evidente que $[\mathcal{S}] = \mathbb{T}^{-1}$. Portanto, \mathcal{S} representa um cisalhamento médio, ou taxa de deformação média, introduzido(a) pela fonte de produção da turbulência; no caso de túneis de vento, esta fonte é a grade passiva ou ativa na entrada do túnel de vento.

Continuando,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{5}{3} \alpha^{-1} k^{2/3} \epsilon_e^{1/3} - \mathcal{S} \right] E_e + \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3} \frac{dE_e}{dk} + 2\nu k^2 E_e = 0, \\ & \frac{dE_e}{dk} + \left[\frac{5}{3} k^{-1} - \mathcal{S} \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{-5/3} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \right] E_e = 0, \\ & \frac{dE_e}{E_e} = - \left[\frac{5}{3} k^{-1} - \mathcal{S} \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{-5/3} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \right] dk, \\ & \ln \frac{E_e}{E_{e0}} = - \frac{5}{3} \ln k - \frac{3}{2} \mathcal{S} \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{-2/3} - \frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3}, \\ & E_e = E_{e0} k^{-5/3} \exp \left[- \frac{3}{2} \mathcal{S} \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{-2/3} \right] \exp \left[- \frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

O espectro agora não diverge quando $k \downarrow 0$; é fácil verificar que $\lim_{k \rightarrow 0} E_e(k) = 0$, devido ao termo contendo \mathcal{S} .

É conveniente agora adimensionalizar o espectro. Para isto, define-se

$$\ell \equiv (\mathcal{S}\epsilon_e^{-1/3})^{-3/2} = \mathcal{S}^{-3/2}\epsilon_e^{1/2}. \quad (3.65)$$

Nós esperamos que $\ell/r_\epsilon \gg 1$; na verdade ℓ pode ser interpretado como uma escala integral do escoamento, e

$$\frac{\ell}{r_\epsilon} = \left(\frac{\epsilon_e}{\mathcal{S}^2\nu}\right)^{3/4} \equiv R_\ell^{3/4} \Rightarrow R_\ell = \frac{\epsilon_e}{\mathcal{S}^2\nu} \quad (3.66)$$

define um número de Reynolds R_ℓ em função da taxa de deformação \mathcal{S} . É interessante notar que a dependência de ℓ/r_ϵ com R_ℓ é uma das primeiras coisas a aparecer no estudo de turbulência (por exemplo, veja: (Davidson, 2004, p. 20, eq. 1.3)). O espectro (3.64) torna-se

$$\begin{aligned} E_e &= E_{e0}k^{-5/3} \exp\left\{-\frac{3\alpha}{2}[(r_\epsilon k)^{4/3} + (\ell k)^{-2/3}]\right\} \\ &= E_{e0}k^{-5/3} \exp\left\{-\frac{3\alpha}{2}\left[(r_\epsilon k)^{4/3} + \left(\frac{\ell}{r_\epsilon}\right)^{-2/3}(r_\epsilon k)^{-2/3}\right]\right\} \\ &= E_{e0}k^{-5/3} \exp\left[-\frac{3\alpha}{2}(r_\epsilon k)^{4/3} - (3\alpha/2)^{3/2}R_\ell^{-1/2}((3\alpha/2)^{-1/2}(r_\epsilon k)^{-2/3})\right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

A integral de dissipação será

$$\epsilon_e = \int_{k=0}^{\infty} 2\nu E_{e0}k^{1/3} \exp\left[-\frac{3\alpha}{2}(r_\epsilon k)^{4/3} - (3\alpha/2)^{3/2}R_\ell^{-1/2}((3\alpha/2)^{-1/2}(r_\epsilon k)^{-2/3})\right] dk. \quad (3.68)$$

A mudança de variável agora é

$$u = (3\alpha/2)^{1/2}(r_\epsilon k)^{2/3}, \quad (3.69)$$

$$k = \frac{u^{3/2}}{(3\alpha/2)^{3/4}r_\epsilon}, \quad (3.70)$$

$$k^{1/3} = \frac{u^{1/2}}{(3\alpha/2)^{1/4}r_\epsilon^{1/3}}, \quad (3.71)$$

$$dk = \frac{3u^{1/2}}{2(3\alpha/2)^{3/4}r_\epsilon} du, \quad (3.72)$$

donde

$$\begin{aligned} \epsilon_e &= \int_{u=0}^{\infty} 2\nu E_{e0} \frac{u^{1/2}}{(3\alpha/2)^{1/4}r_\epsilon^{1/3}} \exp\left(-u^2 - \frac{(d_1 R_\ell)^{-1/2}}{u}\right) \frac{3u^{1/2}}{2(3\alpha/2)^{3/4}r_\epsilon} du \\ &= \frac{2\nu E_{e0}}{\alpha r_\epsilon^{4/3}} A_1((d_1 R_\ell)^{-1/2}), \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde

$$d_1 = \left(\frac{2}{3\alpha}\right)^3 = 0,070602994 \quad (3.74)$$

(para $\alpha = 1,613$) e

$$A_1(x) \equiv \int_0^{\infty} u \exp\left(-u^2 - \frac{x}{u}\right) du \quad (3.75)$$

é a *função de Abramowitz* de ordem 1 (Abramowitz, 1953; Abramowitz e Stegun, 1972, p. 1003); Harris (1999, p. 137) chama $A_1(x)$ de *integral de Abramowitz*. O cálculo de $A_1(0) = 1/2$ é elementar, e produz para $\mathcal{S} = 0$ a mesma constante de integração de antes: $E_{e0} = \alpha\epsilon_e^{2/3}$.

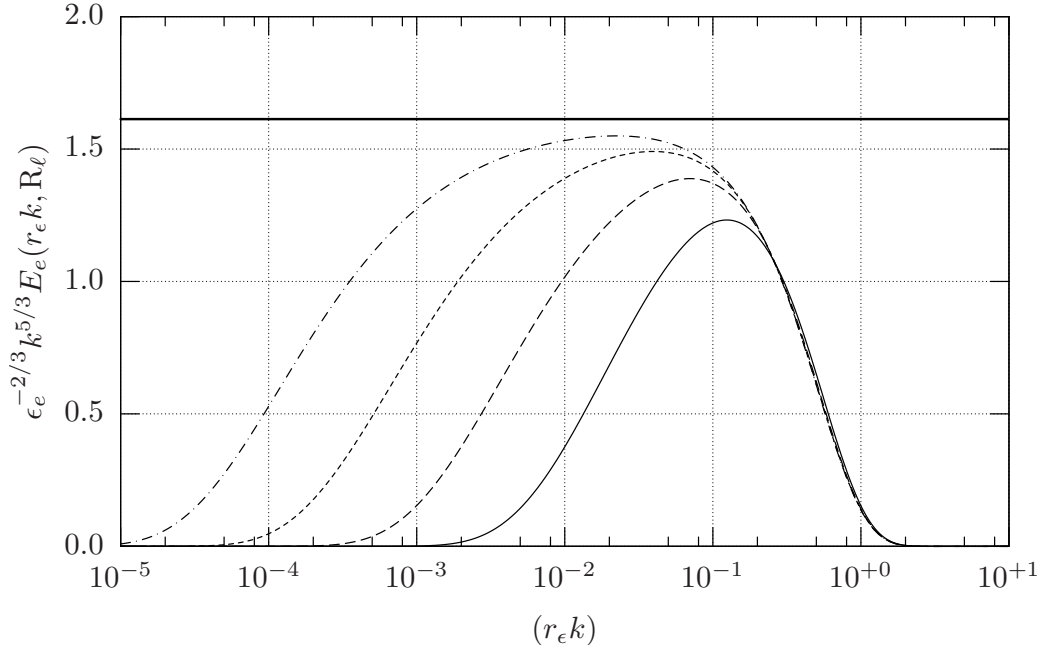


Figura 3.3: Espectros adimensionais de Pao para $R_\ell = 10^3$, $R_\ell = 10^4$, $R_\ell = 10^5$ e $R_\ell = 10^6$. A linha horizontal corresponde a $\alpha = 1.613$, que neste modelo é o valor assintótico da constante de Kolmogorov para $R_\ell \rightarrow \infty$

Uma aproximação de ordem 2 para a integral é (Abramowitz e Stegun, 1972)

$$\epsilon_e \approx \frac{\nu E_{e0}}{\alpha r_\epsilon^{4/3}} \left[1 - \sqrt{\pi} (d_1 R_\ell)^{-1/2} + \left(\frac{3}{2}(1 - \gamma) - \ln(d_1 R_\ell)^{-1/2} \right) (d_1 R_\ell)^{-1} \right], \quad (3.76)$$

onde $\gamma \approx 0,57721566$ é a constante de Euler; a solução para a constante E_{e0} é

$$E_{e0} = \frac{\alpha \epsilon_e^{2/3}}{1 - \sqrt{\pi} (d_1 R_\ell)^{-1/2} + \left(\frac{3}{2}(1 - \gamma) - \ln(d_1 R_\ell)^{-1/2} \right) (d_1 R_\ell)^{-1}}. \quad (3.77)$$

O espectro adimensional resultante será

$$\epsilon_e^{-2/3} k^{5/3} E_e(r_\epsilon k) = \frac{\alpha \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (r_\epsilon k)^{4/3} - \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^{-1/2} (d_1 R_\ell)^{-1/2} (r_\epsilon k)^{-2/3} \right]}{1 - \sqrt{\pi} (d_1 R_\ell)^{-1/2} + \left(\frac{3}{2}(1 - \gamma) - \ln(d_1 R_\ell)^{-1/2} \right) (d_1 R_\ell)^{-1}}. \quad (3.78)$$

A figura 3.3 mostra os espectros adimensionais resultantes para $R_\ell = 10^3$, $R_\ell = 10^4$, $R_\ell = 10^5$ e $R_\ell = 10^6$.

Alguns problemas do espectro (3.78) ficam evidentes: além de inexistir o gargalo observado experimentalmente em $E_e(k)$, não há uma faixa inercial claramente definida, exceto para R_ℓ demasiadamente altos, já que mesmo $R_\ell = 10^6$ não é capaz de produzir a faixa inercial.

3.6 Um modelo de fechamento Pao com produção proporcional a \mathcal{S}^2 em regime permanente

Para sanar as dificuldades aparentes de (3.78), vamos tentar modelar o termo de produção proporcional a \mathcal{S}^2 : a formulação dimensionalmente correta deve-se a Claussen (1985), e é dada por

$$-\mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-1/3} k^{-2/3} E_e + \frac{d}{dk} \left[\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} E_e \right] + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (3.79)$$

Fisicamente, (3.79) difere de (3.63) pelo fato de que o efeito do cisalhamento \mathcal{S} sobre a produção de ECT agora depende do número de onda k , sendo tanto mais importante quanto menor for k .

Continuando,

$$\begin{aligned}
-\mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-1/3} k^{-7/3} E_C + \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \frac{dE_C}{dk} + 2\nu k^{1/3} E_C &= 0, \\
\frac{dE_C}{dk} &= \alpha \mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-2/3} k^{-7/3} E_C - 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} E_C, \\
\frac{dE_C}{E_C} &= \alpha \mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-2/3} k^{-7/3} dk - 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} dk, \\
\ln \frac{E_C}{E_{C0}} &= -\frac{3}{4} \alpha \mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-2/3} k^{-4/3} + \frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3}, \\
E_e &= E_{C0} k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3}{4} \alpha \mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-2/3} k^{-4/3} \right] \exp \left[\frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} \right]. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

A adimensionalização deste espectro prossegue da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
E_e &= E_{C0} k^{-5/3} \exp \left\{ -\frac{3\alpha}{2} \left[(r_\epsilon k)^{4/3} + \frac{1}{2} (\ell k)^{-4/3} \right] \right\} \\
&= E_{C0} k^{-5/3} \exp \left\{ -\frac{3\alpha}{2} \left[(r_\epsilon k)^{4/3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{r_\epsilon} \right)^{-4/3} (r_\epsilon k)^{-4/3} \right] \right\} \\
&= E_{C0} k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (r_\epsilon k)^{4/3} - \frac{1}{2} \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^2 \mathbb{R}_\ell^{-1} \left(\left(\frac{3\alpha}{2} \right)^{-1} (r_\epsilon k)^{-4/3} \right) \right] \tag{3.81}
\end{aligned}$$

A integral de dissipação será

$$\epsilon_e = \int_{k=0}^{\infty} 2\nu E_{C0} k^{1/3} \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (r_\epsilon k)^{4/3} - \frac{1}{2} \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^2 \mathbb{R}_\ell^{-1} \left(\frac{2}{3\alpha} (r_\epsilon k)^{-4/3} \right) \right] dk. \tag{3.82}$$

usando a mesma mudança de variável definida em (3.69)–(3.72), obtém-se

$$\begin{aligned}
\epsilon_e &= \int_{u=0}^{\infty} 2\nu E_{C0} \frac{u^{1/2}}{(3\alpha/2)^{1/4} r_\epsilon^{1/3}} \exp \left(-u^2 - \frac{(d_2 \mathbb{R}_\ell)^{-1}}{u^2} \right) \frac{3u^{1/2}}{2(3\alpha/2)^{3/4} r_\epsilon} du \\
&= \frac{2\nu E_{C0}}{\alpha r_\epsilon^{4/3}} \int_{u=0}^{\infty} u \exp \left[-u^2 - \frac{(d_2 \mathbb{R}_\ell)^{-1}}{u^2} \right] du \\
&= \frac{\nu E_{C0}}{\alpha r_\epsilon^{4/3}} \int_{v=0}^{\infty} \exp \left[-v - \frac{(d_2 \mathbb{R}_\ell)^{-1}}{v} \right] dv \\
&= \frac{\nu E_{C0}}{\alpha r_\epsilon^{4/3}} \sqrt{4(d_2 \mathbb{R}_\ell)^{-1}} K_1 \left(\sqrt{4(d_2 \mathbb{R}_\ell)^{-1}} \right), \tag{3.83}
\end{aligned}$$

onde

$$d_2 = 2 \left(\frac{2}{3\alpha} \right)^2 = 0,34164789 \tag{3.84}$$

e $K_1(x)$ é a função modificada de Bessel de terceiro tipo, ou função de McDonald (Lebedev (1972), seção 5.7; Gradshteyn e Ryzhik (1980), eq. 3.324 e Abramowitz e Stegun (1972), seção 9.6). Por segurança, a correção de (3.83) foi verificada com o uso de integração numérica.

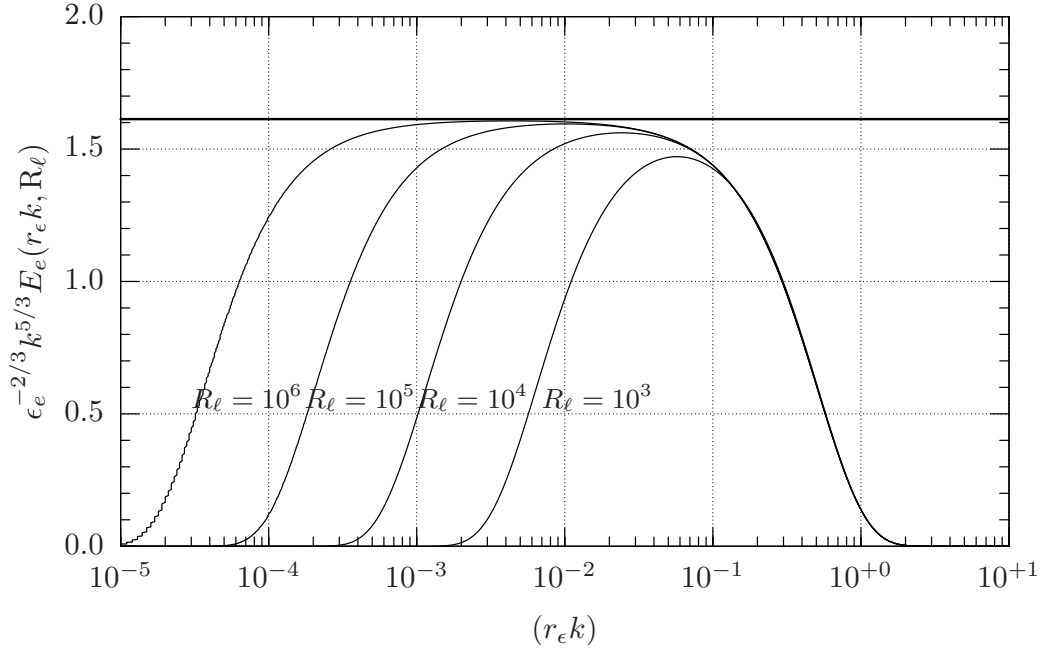


Figura 3.4: Espectro compensado de Pao com produção proporcional a \mathcal{S}^2 : $R_\ell = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6 . A linha horizontal corresponde a $\alpha = 1,613$, que é o valor assintótico da constante de Kolmogorov para $R_\ell \rightarrow \infty$.

Uma aproximação de ordem 2 (ver apêndice B) é

$$\sqrt{4(d_2 R_\ell)^{-1}} K_1 \left(\sqrt{4(d_2 R_\ell)^{-1}} \right) \approx 1 + (d_2 R_\ell)^{-1} [2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - 1] + (d_2 R_\ell)^{-2} \left[2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - \frac{5}{2} \right]. \quad (3.85)$$

A constante de integração, portanto, é

$$E_{C0} = \frac{\alpha \epsilon_e^{2/3}}{1 + (d_2 R_\ell)^{-1} [2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - 1] + (d_2 R_\ell)^{-2} [2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - \frac{5}{2}]} \quad (3.86)$$

e o espectro adimensional

$$\epsilon_e^{-2/3} k^{5/3} E_e(k) = \frac{\alpha \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (r_\epsilon k)^{4/3} - (d_2 R_\ell)^{-1} \frac{2}{3\alpha} (r_\epsilon k)^{-4/3} \right]}{1 + (d_2 R_\ell)^{-1} [2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - 1] + (d_2 R_\ell)^{-2} [2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - \frac{5}{2}]} \quad (3.87)$$

A figura 3.4 mostra o efeito de diferentes números de Reynolds R_ℓ sobre o espectro compensado. O resultado, em comparação com a figura 3.3, é bem mais satisfatório, com o surgimento claro de uma faixa inercial.

Também é importante compararmos o resultado de (3.87) com dados medidos. Uma fonte extremamente importante são os dados de Kang et al. (2003) livremente disponíveis na internet: ver

<http://pegasus.me.jhu.edu/~meneveau/datasets/actgriddata.html>.

Os detalhes das medições podem ser encontrados em Kang et al.; trata-se de um experimento em um túnel de vento com geração de turbulência por uma grade ativa, em um túnel com seção de $1,22 \times 0,91 \text{ m}^2$ e 10 m de comprimento. As comparações mostradas aqui são feitas contra medições na primeira seção após a grade, na posição $x/M = 20$, onde $M = 0,152 \text{ m}$ é o tamanho da grade.

Nossas análises mostraram que (3.87) proporciona um ajuste razoável para o espectro em baixos números de onda — na verdade, consideravelmente melhor que os ajustes das equações (C.2) e (C.3). Sozinha, e utilizando os valores medidos de r_ϵ e de R_ℓ , a equação (C.2) produz um espectro nitidamente abaixo dos valores experimentais na região inercial, enquanto que (3.87) produz um bom ajuste nesta região. Com o termo adicional proposto por Kang et al. (2003), a equação (C.3) é capaz de reproduzir de forma razoavelmente boa a corcova do espectro, mas ela continua produzindo um ajuste ruim tanto em baixos números de onda quanto em números de onda $k_1 r_\epsilon \geq 2 \times 10^{-1}$. Mesmo entre para $r_\epsilon k_1 \in [10^{-2}, 10^{-1}]$ uma análise cuidadosa mostra que (C.3) superestima ligeiramente os valores medidos de F_{11} .

3.7 Um modelo de fechamento Pao-Hill com produção proporcional a S em regime permanente

Utilizando o mesmo $g(k)$ de Hill, equação (3.52), e o mesmo termo de produção baseado em uma taxa de deformação média \mathcal{S} introduzido na equação (3.63), obtém-se a seguinte equação de balanço espectral de energia cinética turbulenta em regime permanente:

$$-SE_e + \frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} k^{5/3} E_e \right\} + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (3.88)$$

Novamente, procuramos a solução primeiramente em termos do espectro compensado E_C :

$$-Sk^{-5/3} E_C + \frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} E_C \right\} + 2\nu k^{1/3} E_C = 0, \quad (3.89)$$

ou ainda

$$\alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} \frac{dE_C}{dk} + \left\{ -Sk^{-5/3} - \frac{2}{3} \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \frac{1}{k^*} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}-1} + 2\nu k^{1/3} \right\} E_C = 0,$$

$$\frac{dE_C}{dk} + \left\{ -S\alpha\epsilon_e^{-1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} k^{-5/3} - \frac{2}{3k^*} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-1} + 2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \right\} E_C = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_C}{E_C} &= S\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{-2/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{-5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d \left(\frac{k}{k^*} \right) \\ &+ \frac{2}{3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-1} d \left(\frac{k}{k^*} \right) - 2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{4/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d \left(\frac{k}{k^*} \right), \end{aligned}$$

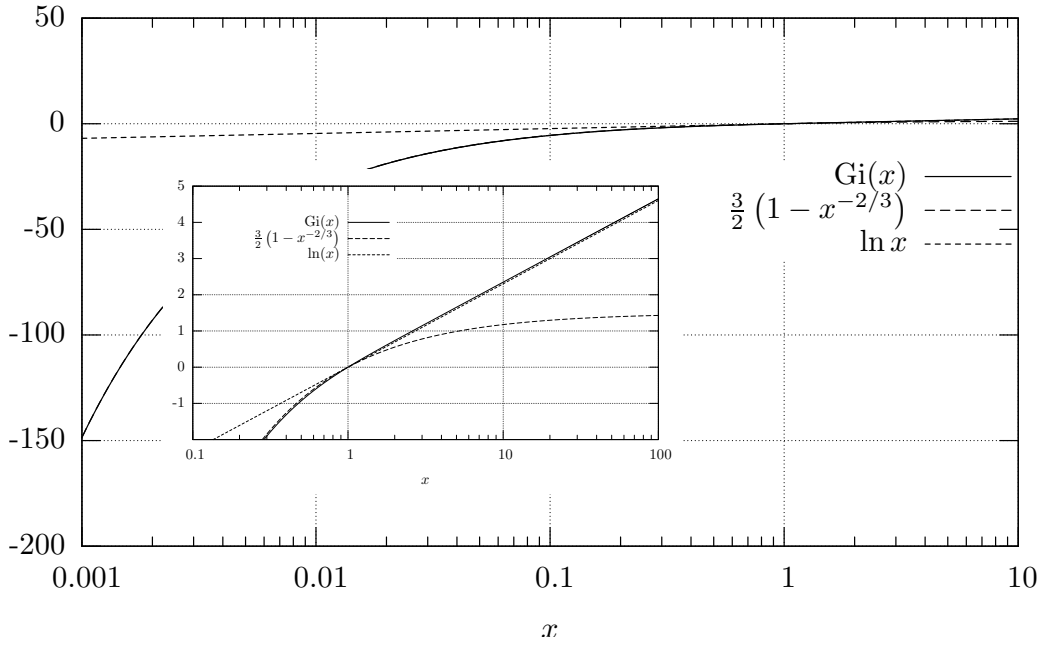


Figura 3.5: Comportamento assintótico de $\text{Gi}(x)$ quando $x \downarrow 0$ e $x \uparrow \infty$.

$$\frac{dE_C}{E_C} = \sigma x^{-5/3} (x^{2a} + 1)^{-\frac{1}{3a}} dx + \frac{1}{3a} \frac{2ax^{2a-1}}{x^{2a} + 1} dx - \mu x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx, \quad (3.90)$$

onde x foi definido em (3.56);

$$\mu = 2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{4/3} = 2\alpha (r_\epsilon k^*)^{4/3}; \quad (3.91)$$

e

$$\sigma = \mathcal{S}\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{-2/3}. \quad (3.92)$$

Integrando,

$$\ln \frac{E_C}{E_{C0}} = \sigma \int_1^{k/k^*} x^{-5/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} dx + \frac{1}{3a} \ln \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right] - \mu \int_0^{k/k^*} x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx. \quad (3.93)$$

Note o limite inferior (1) da primeira integral em (3.93), uma vez que a integral é divergente nos intervalos $(0, 1]$ e $[1, \infty)$.

Definindo-se agora a representação integral

$$\text{Gi}(x) \equiv \int_1^x \xi^{-5/3} (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} d\xi, \quad (3.94)$$

verifica-se facilmente os seguintes comportamentos assintóticos:

$$x \downarrow 0 \Rightarrow \text{Gi}(x) \approx \frac{3}{2} (1 - x^{-2/3}), \quad (3.95)$$

$$x \uparrow \infty \Rightarrow \text{Gi}(x) \approx \ln x \quad (3.96)$$

A figura 3.5 mostra que os comportamentos assintóticos em (3.95) e (3.96) são na verdade excelentes aproximações para todos os valores dos intervalos $(0, 1]$ e $[1, \infty)$, respectivamente.

O espectro de Pao-Hill com produção constante será

$$\begin{aligned}
E_C &= E_{C0} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[\sigma \operatorname{Gi} \left(\frac{k}{k^*}, a \right) - \mu \operatorname{Hi} \left(\frac{k}{k^*}, a \right) \right] \\
k^{5/3} E_e &= E_{C0} \left[\left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[\sigma \operatorname{Gi} \left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*}, a \right) - \mu \operatorname{Hi} \left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*}, a \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.97}$$

A integral de dissipação será agora

$$\begin{aligned}
\epsilon_e &= \int_0^\infty 2\nu k^2 E_e(k) dk \\
&= 2\nu (k^*)^{1/3} E_{C0} \int_0^\infty x^{1/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} \exp [\sigma \operatorname{Gi}(x, a) - \mu \operatorname{Hi}(x, a)] dx \\
&= \frac{2\nu (k^*)^{4/3} E_{C0}}{\mu} \int_0^\infty \exp [\sigma \operatorname{Gi}(x, a) - \mu \operatorname{Hi}(x, a)] \mu \frac{d\operatorname{Hi}}{dx} dx. \\
&= \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty \exp [\sigma \operatorname{Gi}(x, a) - \mu \operatorname{Hi}(x, a)] \mu \frac{d\operatorname{Hi}}{dx} dx.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

A integral (3.98) pode ser aproximada da seguinte forma. Inicialmente, uso (3.96) observando que o maior peso da integral ocorre para $x > 1$; além disso, simplifico $\operatorname{Hi}(x)$ com

$$x \uparrow \infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Hi}(x, a) \approx \frac{x^2}{2}; \tag{3.99}$$

então:

$$\begin{aligned}
\epsilon_e &\approx \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty x^\sigma \exp[-\mu \operatorname{Hi}(x)] \mu \frac{d\operatorname{Hi}}{dx} dx \\
&\approx \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty x^\sigma \exp \left[-\mu \frac{x^2}{2} \right] \mu x dx \\
&= \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \left(\frac{2}{\mu} \right)^{\sigma/2} \frac{\sigma}{2} \Gamma \left(\frac{\sigma}{2} \right) \Rightarrow E_{C0} = \frac{2\alpha \epsilon_e^{2/3}}{\left(\frac{2}{\mu} \right)^{\sigma/2} \sigma \Gamma \left(\frac{\sigma}{2} \right)}.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Com isto, a equação para o espectro torna-se

$$\epsilon_e^{-2/3} k^{5/3} E_e(r_\epsilon k) = \frac{2\alpha}{\left(\frac{2}{\mu} \right)^{\sigma/2} \sigma \Gamma \left(\frac{\sigma}{2} \right)} \left[\left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[\sigma \operatorname{Gi} \left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*}, a \right) - \mu \operatorname{Hi} \left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*}, a \right) \right] \tag{3.101}$$

O grande problema desta formulação é que ela não permite o aparecimento explícito de R_ℓ ; de fato, é fácil verificar que

$$R_\ell \propto \frac{1}{\sigma^2 \mu}, \tag{3.102}$$

o que sugere que talvez seja fisicamente muito mais razoável parametrizar a produção em função de \mathcal{S}^2 , e não de \mathcal{S} . De qualquer modo, por uma questão de completude, nós vamos agora verificar o modelo dado por (3.101). Isto é feito na figura 3.6: a inadequação do modelo é evidente, em sua incapacidade de produzir uma faixa inercial estável.

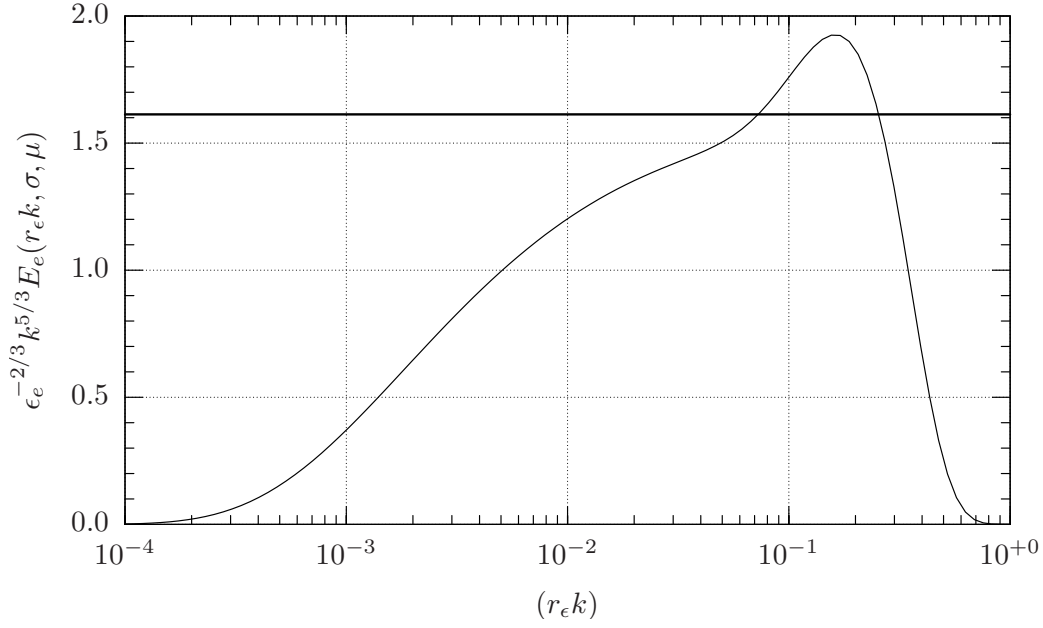


Figura 3.6: Espectro Pao-Hill com termo de produção $\mathcal{S}E_e$; $\mu = 0,25$ e $\sigma = 0,01$.

3.8 Um modelo de fechamento Pao-Hill com produção proporcional a S^2 em regime permanente

Utilizando o mesmo $g(k)$ de Hill, equação (3.52), e o termo de produção proporcional a S^2 introduzido na equação (3.79), obtém-se a seguinte equação de balanço espectral de energia cinética turbulenta em regime permanente:

$$-\mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-1/3} k^{-2/3} E_e \frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} k^{5/3} E_e \right\} + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (3.103)$$

Novamente, procuramos a solução primeiramente em termos do espectro compensado E_C :

$$-\mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-1/3} k^{-7/3} E_C + \frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} E_C \right\} + 2\nu k^{1/3} E_C = 0, \quad (3.104)$$

ou ainda

$$\alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} \frac{dE_C}{dk} + \left\{ -\mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-1/3} k^{-7/3} - \frac{2}{3} \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \frac{1}{k^*} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}-1} + 2\nu k^{1/3} \right\} E_C = 0,$$

$$\frac{dE_C}{dk} + \left\{ -\mathcal{S}^2 \alpha \epsilon_e^{-2/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} k^{-7/3} - \frac{2}{3k^*} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \right\} E_C = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE_C}{E_C} &= \alpha \ell^{-4/3} (k^*)^{-4/3} \left(\frac{k}{k^*}\right)^{-7/3} \left[\left(\frac{k}{k^*}\right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d\left(\frac{k}{k^*}\right) \\
&+ \frac{2}{3} \left(\frac{k}{k^*}\right)^{2a-1} \left[\left(\frac{k}{k^*}\right)^{2a} + 1 \right]^{-1} d\left(\frac{k}{k^*}\right) - 2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{4/3} \left(\frac{k}{k^*}\right)^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*}\right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d\left(\frac{k}{k^*}\right), \\
\frac{dE_C}{E_C} &= \alpha \left(\frac{\ell}{r_\epsilon}\right)^{-4/3} (k^* r_\epsilon)^{-4/3} \left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}\right)^{-7/3} \left[\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}\right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}\right) \\
&+ \frac{2}{3} \left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}\right)^{2a-1} \left[\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}\right)^{2a} + 1 \right]^{-1} d\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}\right) - 2\alpha (k^* r_\epsilon)^{4/3} \left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}\right)^{1/3} \left[\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}\right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}\right), \\
\frac{dE_C}{E_C} &= \alpha (R_\ell R_*)^{-1} x^{-7/3} (x^{2a} + 1)^{-\frac{1}{3a}} dx + \frac{1}{3a} \frac{2ax^{2a-1}}{x^{2a} + 1} dx - 2\alpha R_* x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx, \quad (3.105)
\end{aligned}$$

onde x e foi definido em (3.56), e

$$R_* \equiv (k^* r_\epsilon)^{4/3}. \quad (3.106)$$

Integrando,

$$\begin{aligned}
\ln \frac{E_C}{E_{C0}} &= \alpha (R_\ell R_*)^{-1} \int_1^{k/k^*} x^{-7/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} dx + \frac{1}{3a} \ln \left[\left(\frac{k}{k^*}\right)^{2a} + 1 \right] \\
&\quad - 2\alpha R_* \int_0^{k/k^*} x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx. \quad (3.107)
\end{aligned}$$

Novamente, o limite inferior da primeira integral em (3.107) é 1, uma vez que a integral é divergente no intervalo $(0, 1]$.

Definindo-se agora a representação integral

$$\text{Fi}(x, a) \equiv \int_1^x \xi^{-7/3} (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} d\xi, \quad (3.108)$$

verifica-se facilmente os seguintes comportamentos assintóticos:

$$x \downarrow 0 \Rightarrow \text{Fi}(x) \approx \frac{3}{4} (1 - x^{-4/3}), \quad (3.109)$$

$$x \uparrow \infty \Rightarrow \text{Fi}(x) \approx \frac{3}{2} (1 - x^{-2/3}) \quad (3.110)$$

A figura 3.7 mostra que os comportamentos assintóticos em (3.109) e (3.110) são na verdade excelentes aproximações para todos os valores dos intervalos $(0, 1]$ e $[1, \infty)$, respectivamente.

O espectro de Pao-Hill com produção proporcional a \mathcal{S}^2 será

$$E_C = E_{C0} \left[\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}\right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[\alpha (R_\ell R_*)^{-1} \text{Fi} \left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}, a \right) - 2\alpha R_* \text{Hi} \left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}, a \right) \right]. \quad (3.111)$$

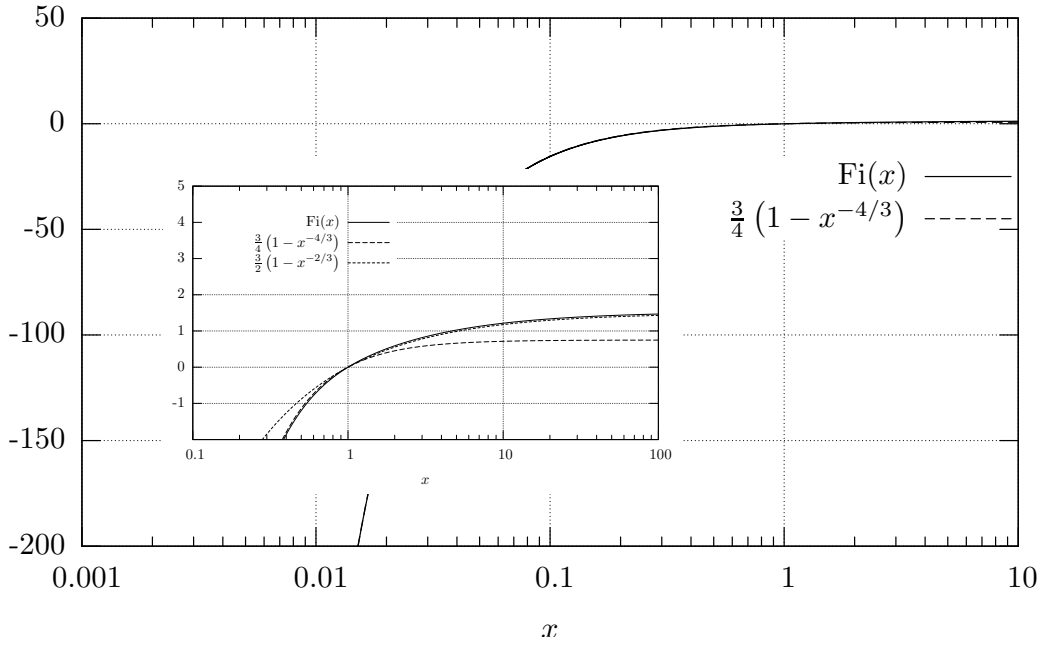


Figura 3.7: Comportamento assintótico de $\text{Fi}(x)$ quando $x \downarrow 0$ e $x \uparrow \infty$.

A integral de dissipação torna-se

$$\begin{aligned}
\epsilon_e &= \int_0^\infty 2\nu k^2 E_e(k) dk \\
&= 2\nu R_* r_\epsilon^{-4/3} E_{C0} \int_0^\infty x^{1/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} \exp [\alpha (R_\ell R_*)^{-1} \text{Fi}(x, a) - 2\alpha R_* \text{Hi}(x, a)] dx \\
&= \frac{2E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty x^{1/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} \exp [\alpha (R_\ell R_*)^{-1} \text{Fi}(x, a) - 2\alpha R_* \text{Hi}(x, a)] \alpha R_* dx \\
&= \frac{2E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty x^{1/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} \exp [\alpha R_* ((R_\ell R_*^2)^{-1} \text{Fi}(x, a) - 2 \text{Hi}(x, a))] \alpha R_* dx. \quad (3.112)
\end{aligned}$$

A integral (3.112) pode ser aproximada da seguinte forma. Inicialmente, uso (3.110) observando que o maior peso da integral ocorre para $x > 1$; além disso, simplifico $\text{Hi}(x)$ com (3.99); então:

$$\epsilon_e \approx \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty \exp \left[\alpha R_* \left((R_\ell R_*^2)^{-1} \left[\frac{3}{2} (1 - x^{-2/3}) \right] - x^2 \right) \right] (2\alpha R_* x) dx; \quad (3.113)$$

Fazendo-se

$$u = \alpha R_* x^2, \quad (3.114)$$

$$du = 2\alpha R_* x dx, \quad (3.115)$$

obtem-se

$$\begin{aligned}
\epsilon_e &\approx \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_{u=0}^\infty \exp \left[\frac{3}{2} \alpha (R_\ell R_*)^{-1} \right] \exp \left[- \left(u + \frac{3(\alpha R_*)^{4/3} (R_\ell R_*^2)^{-1}}{2u^{1/3}} \right) \right] du, \\
E_{C0} &= \frac{\alpha \epsilon_e^{2/3} \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (R_\ell R_*)^{-1} \right]}{\text{Epi} \left[\frac{3}{2} (\alpha R_*)^{4/3} (R_\ell R_*^2)^{-1} \right]}, \quad (3.116)
\end{aligned}$$

onde a função $\text{Epi}(x)$ é definida pela integral; seu cálculo está descrito no apêndice F.

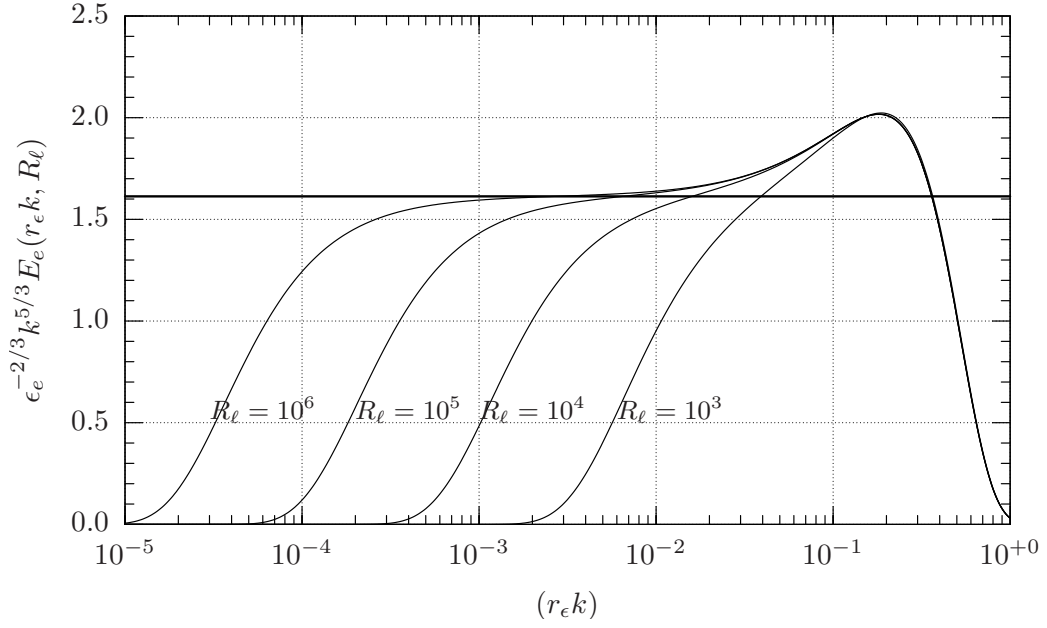


Figura 3.8: Espectro compensado tridimensional de Pao-Hill ($\alpha_e = 1,613$) com termo de produção proporcional a \mathcal{S}^2 , com $a = 0,6$ e $R_* = 0,1$, para $R_\ell = 10^3$, $R_\ell = 10^4$, $R_\ell = 10^5$ e $R_\ell = 10^6$.

O espectro compensado tri-dimensional de energia cinética turbulenta será

$$\epsilon_e^{-2/3} k^{5/3} E_e(r_\epsilon k) = \frac{\alpha \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (R_\ell R_*)^{-1} \right]}{\text{Epi} \left[\frac{3}{2} (\alpha R_*)^{4/3} (R_\ell R_*^2)^{-1} \right]} \left[\left(\frac{r_\epsilon k}{R_*^{3/4}} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[\alpha (R_\ell R_*)^{-1} \text{Fi} \left(\frac{r_\epsilon k}{R_*^{3/4}}, a \right) - 2\alpha R_* \text{Hi} \left(\frac{r_\epsilon k}{R_*^{3/4}}, a \right) \right]. \quad (3.117)$$

Capítulo 4

O fechamento de Pao para um regime transiente

Considere agora uma tentativa de resolver a equação (3.5) completa, com o termo transiente. Entretanto, agora vamos procurar adimensionalizar a equação antes de atacá-la. Usando as microescalas de Kolmogorov (2.63)–(2.64), faça então as adimensionalizações

$$k = \nu^{-3/4} \epsilon_e^{1/4} \kappa, \quad (4.1)$$

$$t = \nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2} \tau. \quad (4.2)$$

Substitua agora em (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nu^{-1/2} \epsilon_e^{1/2} \Phi)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial(\nu^{-3/4} \epsilon_e^{1/4} \kappa)} [\alpha^{-1} (\nu^{-3/4} \epsilon_e^{1/4} \kappa)^{5/3} \epsilon_e^{1/3} \Phi] + 2\nu (\nu^{-3/4} \epsilon_e^{1/4} \kappa)^2 \Phi = 0 \\ \frac{\partial(\nu^{-1/2} \epsilon_e^{1/2} \Phi)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \kappa} [\alpha^{-1} \kappa^{5/3} (\nu^{-1/2} \epsilon_e^{1/2} \Phi)] + 2\kappa^2 (\nu^{-1/2} \epsilon_e^{1/2} \Phi) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Observe o cuidado em não retirar ϵ_e da derivada $\partial(\cdot)/\partial \tau$, uma vez que $\epsilon_e = \epsilon_e(t)$. É simples obter uma variável dependente adimensional, multiplicando-se (4.3) por $e_0^{-3/2}$, onde e_0 é a energia cinética turbulenta *inicial* do problema (note que, da mesma maneira que ocorre com ϵ_e , não podemos multiplicar (4.3) impunemente por $e = e(t)$):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \kappa} [\alpha^{-1} \kappa^{5/3} \psi] + 2\kappa^2 \psi = 0 \quad (4.4)$$

onde

$$\psi = \nu^{-1/2} \epsilon_e^{1/2} e_0^{-3/2} E \quad (4.5)$$

é o espectro adimensional de energia cinética turbulenta. Aparentemente, as 2 condições que devem ser impostas para a solução do problema são (2.37) e (2.62). Em princípio, e_0 e ϵ_{e0} são conhecidos.

4.0.1 O método das características em variáveis adimensionais

Expanda a derivada em relação a κ de (4.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \alpha^{-1} \kappa^{5/3} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} + \alpha^{-1} \psi \frac{5}{3} \kappa^{2/3} + 2\kappa^2 \psi = 0 \\ \alpha \kappa^{-5/3} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} + \frac{5}{3} \kappa^{-1} \psi + 2\alpha \kappa^{1/3} \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} + \alpha \kappa^{-5/3} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = - \left[\frac{5}{3} \kappa^{-1} + 2\alpha \kappa^{1/3} \right] \psi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Com o auxílio da fórmula da derivada total,

$$\frac{d\psi}{d\kappa} = \frac{\partial\psi}{\partial\kappa} + \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \frac{d\tau}{d\kappa}, \quad (4.7)$$

identifique a equação característica

$$\frac{d\tau}{d\kappa} = \alpha\kappa^{-5/3} \Rightarrow \quad (4.8)$$

$$\tau = \frac{3}{2} \left[\kappa_0^{-2/3} - \kappa^{-2/3} \right], \quad (4.9)$$

$$\kappa_0 = \left[\frac{2}{3}\tau + \kappa^{-2/3} \right]^{-3/2} \approx \kappa - \tau\kappa^{5/3} + \frac{(5\tau^2)\kappa^{7/3}}{6} - \frac{(35\tau^3)\kappa^3}{54} + \dots \quad (4.10)$$

As linhas características dadas pela equação (4.10) estão mostradas na figura 4.1 para uma concentração de números de onda em redor de $\kappa_0 = 10^{-4}$. Estes números de onda são transladados ao longo de características para a direita, ou seja: para números de onda progressivamente mais altos. À medida em que isto acontece, os números de onda ganham uma “velocidade” $d\kappa/d\tau$ cada vez maior: em torno de $\kappa = 0,1$ esta velocidade é praticamente infinita, e todos os números de onda da figura que estavam ao redor de 10^{-4} em $\tau = 0$ são lançados para $\kappa = +\infty$. Como veremos a seguir, isto terá um papel importante em lançar os espectros em última instância na faixa de dissipação viscosa. Os números de onda iniciais mostrados na figura 4.1 possuem um tempo *finito* de vida: nenhum deles existe após $\tau = 1000$. Na verdade, o limite exato de existência do número de onda $\kappa_0 = 10^{-4}$ é dado por $\kappa \rightarrow \infty$ em (4.10), e é igual a $\tau = 696$.

O método das características agora consiste em resolver o problema elementar

$$\frac{d\psi}{d\kappa} = - \left[\frac{5}{3}\kappa^{-1} + 2\alpha\kappa^{1/3} \right] \psi, \quad (4.11)$$

cuja solução é

$$\psi(\kappa, \tau) = \psi_0(\kappa_0)\psi_I(\kappa, \tau)\psi_D(\kappa, \tau), \quad (4.12)$$

onde $\psi_0(\kappa_0)$ é a condição inicial do problema,

$$\psi_I(\kappa_0) = \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \right)^{-5/3}, \quad (4.13)$$

$$\psi_D(\kappa, \tau) = \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} \left(\kappa^{4/3} - \kappa_0^{4/3} \right) \right] \quad (4.14)$$

e $\kappa_0 = \kappa_0(\kappa, \tau)$ é dado por (4.10).

4.1 Os efeitos de translação, transferência inercial e dissipação

Para obtermos um espectro efetivo, precisamos de uma condição inicial. Nosso primeiro teste é

$$\psi_0(\kappa_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\kappa} \exp \left[-\left(\frac{\kappa_0 - \kappa_c}{\Delta\kappa} \right)^2 \right], \quad (4.15)$$

onde $\kappa_c = 10^{-4}$, e $\Delta\kappa = 8,0 \times 10^{-6}$. Esta condição inicial é uma aproximação de uma “delta de Dirac” centrada em κ_c ; ela sugere uma situação em que inicialmente a turbulência foi gerada em torno de “grandes escalas”.

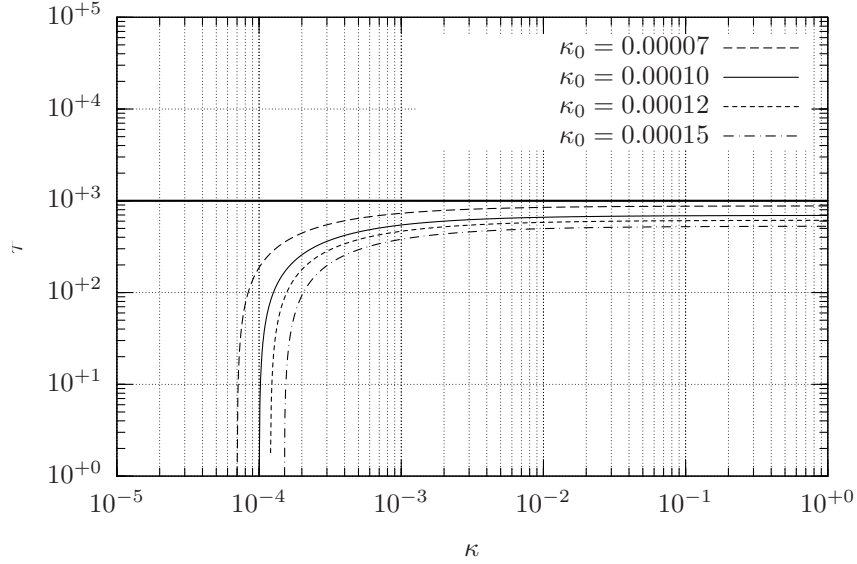


Figura 4.1: As linhas características da solução transiente

O efeito da translação da condição inicial é mostrado na figura 4.3-a, e o efeito da condição inercial transformada pela transferência inercial, ou seja: o produto $\psi_0(\kappa, t)\psi_I(\kappa, t)$, é mostrado na figura 4.3-b. Em 4.3-a, as duas últimas curvas (correspondentes a $\tau = 750$ e $\tau = 825$) não possuem máximos, sendo assintóticas a valores constantes. Isto é porque para estes valores de τ o número de onda que estava em κ_0 (a abscissa do pico em $\tau = 0$) é mapeado para infinito, ou seja: o tempo finito de existência de κ_0 , $\tau = 696$, é menor que os tempos adimensionais destas curvas. Note também que a simples translação da condição inicial ao longo das características não conserva as áreas das curvas $\psi_0(\kappa, \tau)$. Em 4.3-b, note que a transferência inercial modifica os picos da condição inicial no sentido negativo dos números de onda: os picos das curvas de 4.3-b estão todos à esquerda dos picos das curvas respectivas de 4.3-a.

O efeito da dissipação viscosa pode ser verificado plotando-se o termo correspondente em função do tempo adimensional τ (figura 4.4-a) e do número de onda adimensional κ (figura 4.4-b). A figura 4.4-a mostra que para números de onda da ordem de 0,1 ou menores, $\psi_D \approx 1$ por um longo tempo. Para $\kappa \sim 1$, ψ_D decai para um valor não-nulo entre $\tau = 0$ e $\tau = 100$. Finalmente, para $\kappa \gg 1$, ψ_D decai para zero muito rapidamente. A figura 4.4-b mostra o comportamento de ψ_D em κ para 3 valores de τ : a partir de $\tau = 0,1$, a curva não se “move” mais. Isto é coerente com a idéia de que os efeitos da dissipação viscosa se fazem sentir, em qualquer τ , em números de onda $\kappa \sim 1$, ou seja: na microescala de Kolmogorov.

Finalmente, a solução completa $\psi(\kappa, \tau)$ entre os tempos adimensionais $\tau = 0$ e $\tau = 825$ é mostrada na figura 4.5.

4.2 O cálculo de $\epsilon_e(t)$

A equação utilizada para adimensionalizar o espectro, (4.5), envolve a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta $\epsilon_e(t)$, que é uma função do tempo. É importante, portanto, ter à disposição um método que calcule $\epsilon_e(t)$ a partir da solução analítica adimensional $\psi(\kappa, \tau)$. O valor instantâneo de $\epsilon_e(t)$ é dado por (3.8); usando (4.1), (4.2) e (4.5) e substituindo na primeira

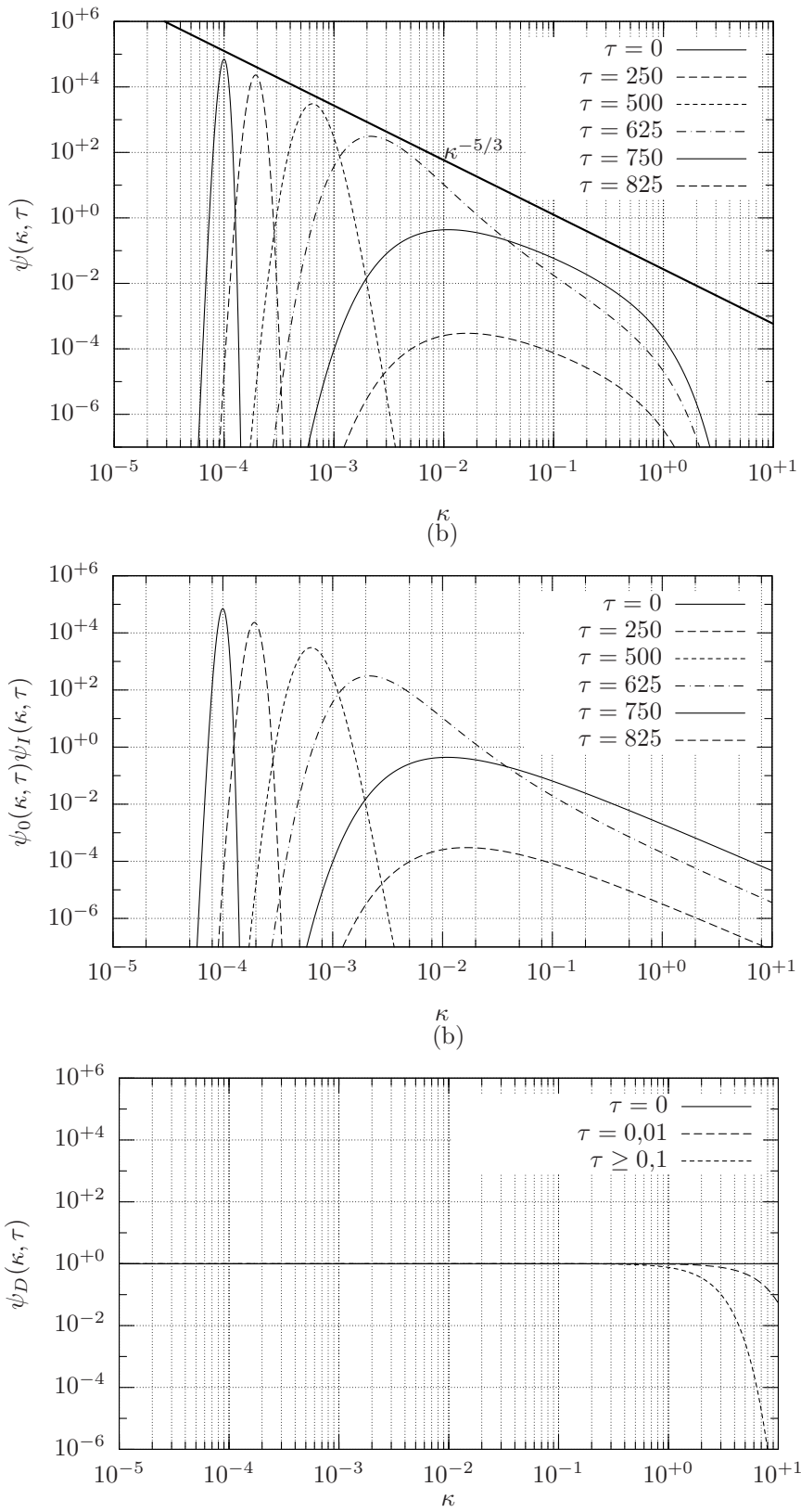


Figura 4.2: Espectro adimensional $\psi(\kappa, \tau)$ obtido pelo método das características

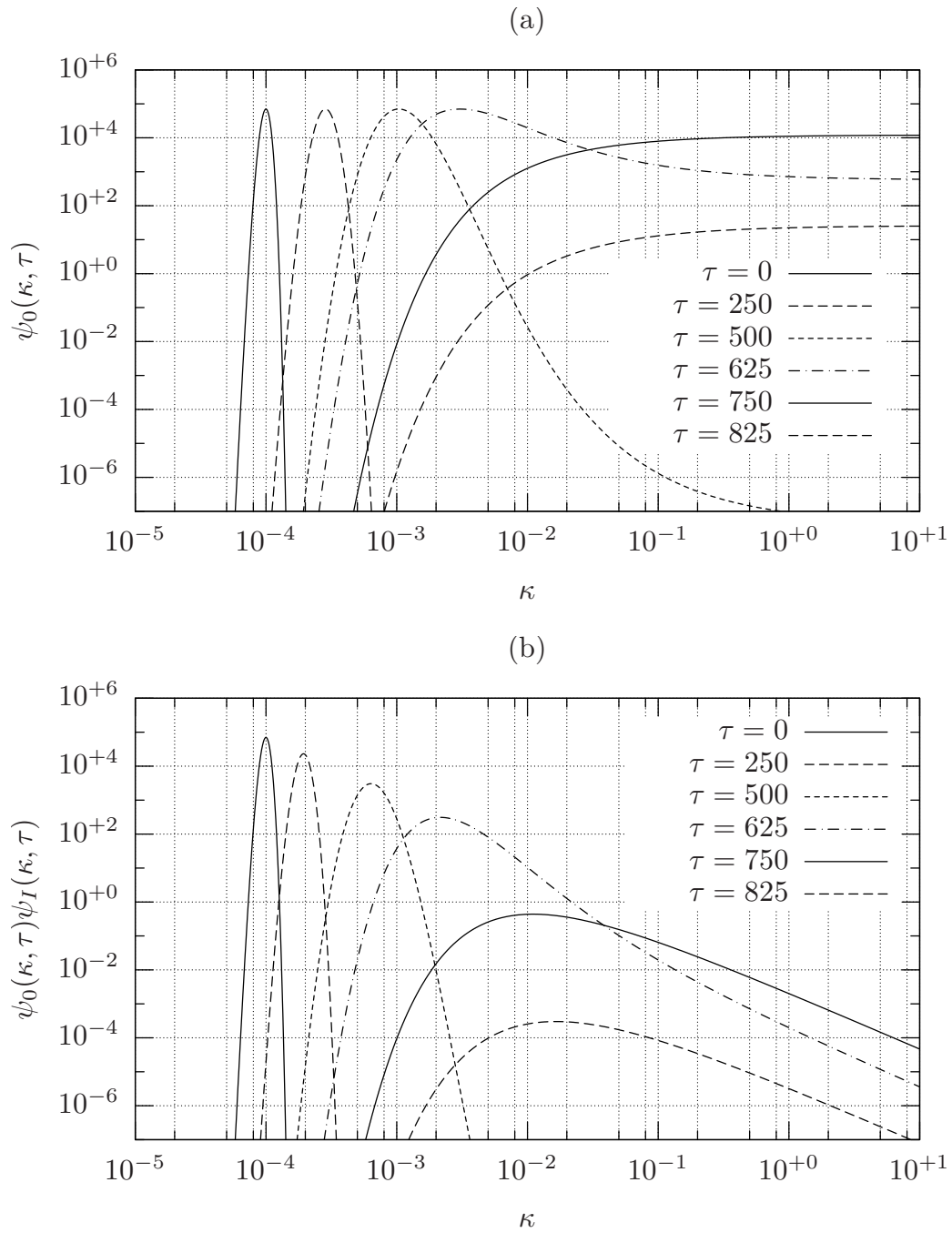


Figura 4.3: Translação da condição inicial (4.15) pelo método das características (a), e sua modificação pela transferência inercial (b)

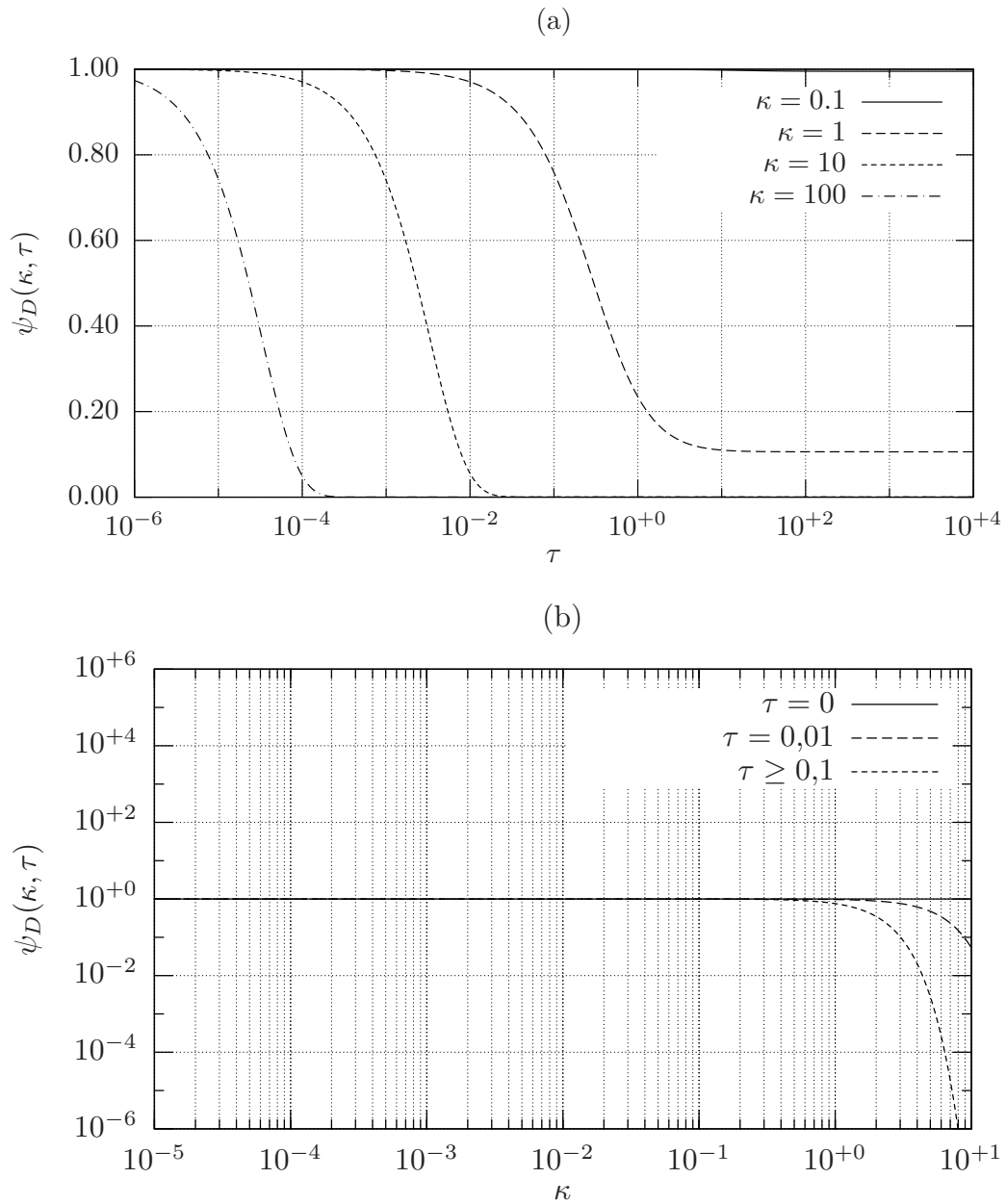


Figura 4.4: O efeito da dissipação viscosa no modelo espectral em função de τ (a) e de κ (b)

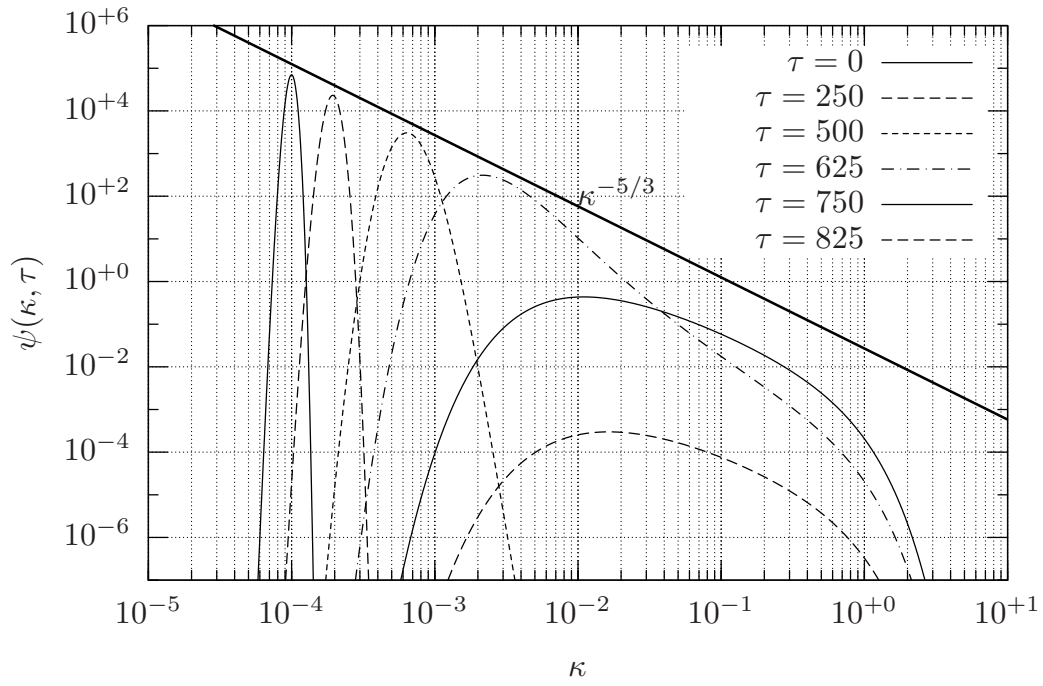


Figura 4.5: Espectro adimensional em função de κ para vários τ 's

equação,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_e(t) &= 2\nu \int_{k=0}^{\infty} k^2 E_e(k, t) dk \\
 &= 2\nu \int_{\kappa=0}^{\infty} [\nu^{-9/4} \epsilon_e^{3/4}] [\nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2} e_0^{3/2}] \kappa^2 \psi(\kappa, \tau) d\kappa \Rightarrow \\
 \epsilon_e(t)^{3/4} \nu^{3/4} e_0^{-3/2} &= 2 \int_{\kappa=0}^{\infty} \kappa^2 \psi(\kappa, \tau) d\kappa
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Fazendo

$$G(\tau; t) \equiv \left(\frac{\nu\tau}{e_0 t} \right)^{3/2} = \epsilon_e^{3/4} \nu^{3/4} e_0^{-3/2}, \tag{4.17}$$

$$F(\tau) \equiv 2 \int_{\kappa=0}^{\infty} \kappa^2 \psi(\kappa, \tau) d\kappa, \tag{4.18}$$

o cálculo de $\epsilon_e(t)$ consiste agora em resolver numericamente ou analiticamente a equação

$$G(\tau; t) = F(\tau) : \tag{4.19}$$

cada novo valor de t gera uma nova raiz τ a qual produz por sua vez $\epsilon_e(t)$ via (4.2).

A energia cinética turbulenta instantânea é dada por

$$e(t) = \int_{k=0}^{\infty} E_e(k) dk \tag{4.20}$$

$$= \int_{\kappa=0}^{\infty} [\nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2} e_0^{3/2}] \psi(\kappa, \tau) d\kappa \tag{4.21}$$

$$= [\nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2} e_0^{3/2}] \int_{\kappa=0}^{\infty} \psi(\kappa, \tau) d\kappa \equiv [\nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2} e_0^{3/2}] E(\tau). \tag{4.22}$$

De posse da solução analítica (4.12)–(4.14) e a partir da condição inicial adimensional (4.15), as integrais $E(\tau)$ e $F(\tau)$ podem ser calculadas numericamente a partir de $\tau = 0$, com o resultado mostrado na figura 4.6.

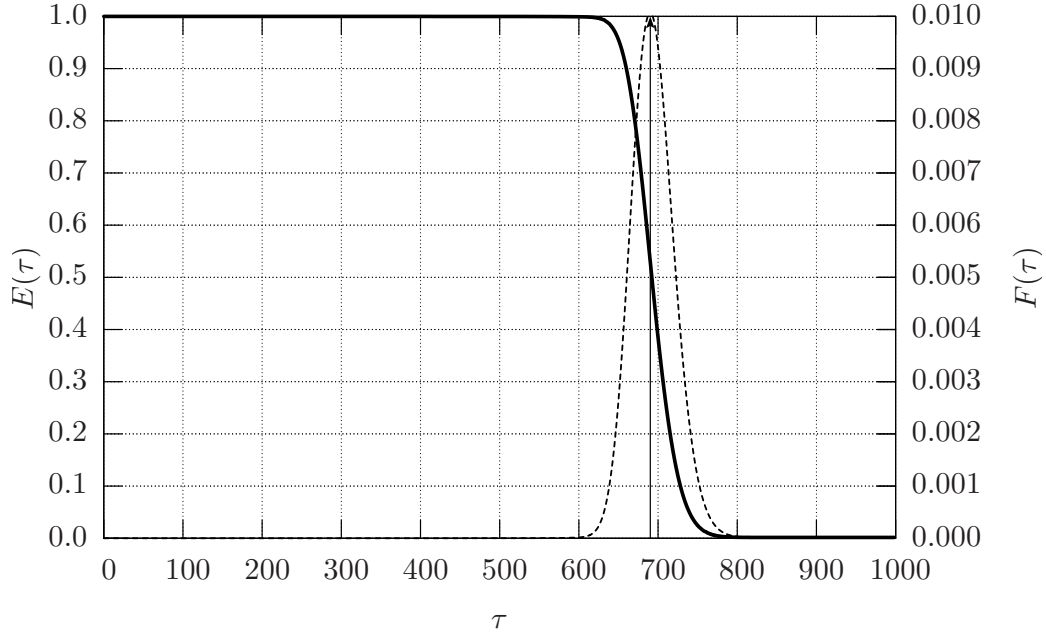


Figura 4.6: Energia cinética turbulenta adimensional $E(\tau)$ (linha grossa contínua) e sua taxa de dissipação adimensional $F(\tau)$ (linha tracejada) em função do tempo adimensional τ . A linha vertical contínua em $\tau \approx 690.2$ indica o máximo de $F(\tau)$ que coincide com o ponto de inflexão de $E(\tau)$.

Agora, valores numéricos precisam ser obtidos. As equações ajustadas por [Kang et al. \(2003\)](#) para $e(t)$ e $\epsilon_e(t)$ em um túnel de vento são

$$e(t) = AU^2 \left(\frac{M}{Ut} \right)^n, \quad (4.23)$$

$$\epsilon_e(t) = -\frac{de}{dt} = \frac{nAU^3}{M} \left(\frac{M}{Ut} \right)^{n+1}, \quad (4.24)$$

onde $U = 11,2 \text{ ms}^{-1}$, é a velocidade média no centro do túnel de vento, $M = 0,152 \text{ m}$ é o tamanho da grade ativa utilizada, $A = 1,8$ e $n = 1,25$. O problema com estas equações é que elas prevêem valores infinitos para $e_0 = e(0)$ e para $\epsilon_{e0} = \epsilon_e(0)$. Os gráficos correspondentes em função do tempo são mostrados na figura 4.7

Tente separação de variáveis, na forma

$$E(k, t) = T(t)K(k) : \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial TK}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial k} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} TK] + 2\nu k^2 TK &= 0 \\ K \frac{dT}{dt} + T \frac{d}{dk} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} K] + 2\nu k^2 KT &= 0 \\ \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = - \left\{ \frac{1}{K} \frac{d}{dk} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} K] + 2\nu k^2 \right\} &= -\lambda \end{aligned} \quad (4.26)$$

A solução em T não poderia ser mais simples:

$$T = e^{-\lambda t} \quad (4.27)$$

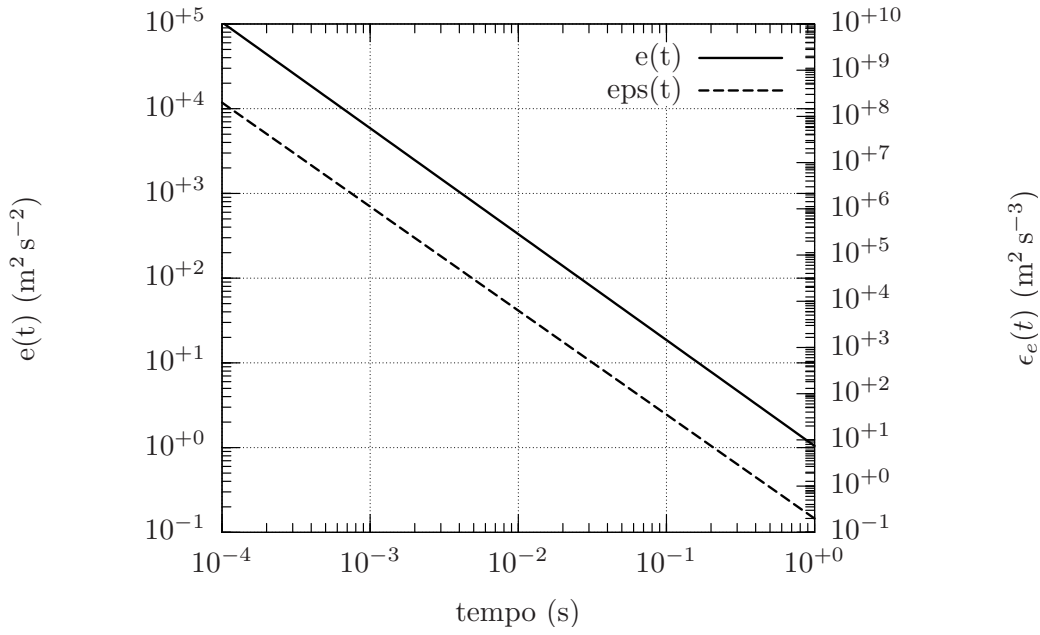


Figura 4.7: evolução temporal da energia cinética turbulenta e da sua taxa de dissipação

e certamente pode ser associada com medições de decaimento de turbulência homogênea (e isotrópica?) em túneis de vento. Agora:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dk} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} K] + 2\nu k^2 K - \lambda K = 0, \\
& \alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} \frac{dK}{dk} + \frac{5}{3} \alpha^{-1} k^{2/3} \epsilon_e^{1/3} K + 2\nu k^2 K - \lambda K = 0, \\
& \frac{dK}{dk} + \left[\frac{5}{3} k^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} - \alpha \lambda \epsilon_e^{-1/3} k^{-5/3} \right] K = 0, \\
& \frac{dK}{K} = - \left[\frac{5}{3} k^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} - \alpha \lambda \epsilon_e^{-1/3} k^{-5/3} \right] dk, \\
& \ln \frac{K}{K_0} = \left[k^{-5/3} - \frac{3}{2} \alpha \nu \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} - \frac{3}{2} \alpha \lambda \epsilon_e^{-1/3} k^{-2/3} \right], \\
& K = K_0 k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3}{2} \alpha \epsilon_e^{-1/3} (\nu k^{4/3} + \lambda k^{-2/3}) \right]. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Um escoamento com cisalhamento médio unidirecional

5.1 Equações espectrais para cisalhamento médio unidirecional

Vamos então agora fazer as simplificações necessárias para resolver o caso linear (sem convoluções e conseqüentemente sem espectros do tipo $\Phi_{ij,k}$) de um cisalhamento simples do tipo $d\langle U_1 \rangle / dx_3 = \text{constante}$. Seja

$$\frac{d\langle U_1 \rangle}{dx_3}$$

o único gradiente de velocidade média não-nulo no escoamento; então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t} - \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_i k_1}{k^2} \Phi_{3,j} + \frac{k_j k_1}{k^2} \Phi_{i,3} \right) - (\delta_{i1} \Phi_{3,j} + \delta_{j1} \Phi_{i,3}) \right] \\ + i k_n [\Delta_{jm} \Phi_{i,nm} - \Delta_{im} \Phi_{nm,j}] + 2\nu k^2 \Phi_{i,j} = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

É conveniente escrever explicitamente as equações para componente de $\Phi_{i,j}$. Para tanto, considere um escoamento turbulento em que não haja os fluxos de *momentum* $\langle u_2 u_3 \rangle$ e $\langle u_1 u_2 \rangle$;

as componentes do tensor espectral que sobrevivem são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial t} &= \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{3,1} + \frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{1,3} \right) - (\Phi_{3,1} + \Phi_{1,3}) \right] \\ &\quad - ik_n [\Delta_{1m} \Phi_{1,nm} - \Delta_{1m} \Phi_{nm,1}] - 2\nu k^2 \Phi_{1,1}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial t} &= \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{3,2} + \frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{1,3} \right) - \Phi_{3,2} \right] \\ &\quad - ik_n [\Delta_{2m} \Phi_{1,nm} - \Delta_{1m} \Phi_{nm,2}] - 2\nu k^2 \Phi_{1,2}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial t} &= \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} + \frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{1,3} \right) - \Phi_{3,3} \right] \\ &\quad - ik_n [\Delta_{3m} \Phi_{1,nm} - \Delta_{1m} \Phi_{nm,3}] - 2\nu k^2 \Phi_{1,3}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{2,1}}{\partial t} &= \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{2,1}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{3,1} + \frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{2,3} \right) - \Phi_{2,3} \right] \\ &\quad - ik_n [\Delta_{1m} \Phi_{2,nm} - \Delta_{2m} \Phi_{nm,1}] - 2\nu k^2 \Phi_{2,1}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{2,2}}{\partial t} &= \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{2,2}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{3,2} + \frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{2,3} \right) \right] \\ &\quad - ik_n [\Delta_{2m} \Phi_{2,nm} - \Delta_{2m} \Phi_{nm,2}] - 2\nu k^2 \Phi_{2,2}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial t} &= \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} + \frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{2,3} \right) \right] \\ &\quad - ik_n [\Delta_{3m} \Phi_{2,nm} - \Delta_{2m} \Phi_{nm,3}] - 2\nu k^2 \Phi_{2,3}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{3,1}}{\partial t} &= \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{3,1}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{3,1} + \frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} \right) - \Phi_{3,3} \right] \\ &\quad - ik_n [\Delta_{1m} \Phi_{3,nm} - \Delta_{3m} \Phi_{nm,1}] - 2\nu k^2 \Phi_{3,1}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{3,2}}{\partial t} &= \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{3,2}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{3,2} + \frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} \right) \right] \\ &\quad - ik_n [\Delta_{2m} \Phi_{3,nm} - \Delta_{3m} \Phi_{nm,2}] - 2\nu k^2 \Phi_{3,2}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{3,3}}{\partial t} &= \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{3,3}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} + \frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} \right) \right] \\ &\quad - ik_n [\Delta_{3m} \Phi_{3,nm} - \Delta_{3m} \Phi_{nm,3}] - 2\nu k^2 \Phi_{3,3}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.2 Solução de equações de 1^a ordem no espaço com o método das características

5.2.1 Um exemplo inicial

Considere a equação linear de coeficientes não-constantes

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{z}{T} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{x}{LT} \phi = 0. \quad (5.11)$$

Para resolvê-la, faça

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z}{T} \Rightarrow x = \xi + \frac{zt}{T}, \quad (5.12)$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\
&= -\frac{x}{LT}\phi \\
&= -\frac{\xi + zt/T}{LT}\phi.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

A interpretação cinemática de (5.13) é a taxa de variação de ϕ ao longo da trajetória da partícula que se move a partir de $x = \xi$ em $t = 0$ com velocidade $dx/dt = z/T$. Conseqüentemente, ξ é constante em (5.13), e a integração ao longo da característica é elementar: z é um parâmetro (uma constante), e

$$\begin{aligned}
\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\psi}{\psi} &= \int_{\tau=0}^t -\frac{\xi + z\tau/T}{LT} d\tau, \\
\phi(\xi, z, t) &= \phi_0(\xi, z) \exp\left[-\frac{t^2 z + 2Tt\xi}{2LT^2}\right], \\
\phi(x, z, t) &= \phi_0(x - zt/T) \exp\left[-\frac{t^2 z + 2Tt(x - zt/T)}{2LT^2}\right].
\end{aligned} \tag{5.14}$$

5.2.2 A solução de $\Phi_{3,3}$

Escrita de maneira mais fácil a ser resolvida pelo método das características (vide exemplo acima), a equação (5.10) pode ser manipulada da seguinte forma: inicialmente, define-se a característica de uma “partícula” que está em K_3 em $t = 0$ e em k_3 em t (naturalmente, como estamos no espaço de números de onda, esta é uma partícula altamente abstrata — na verdade, trata-se de um “pacote” de onda cuja frequência vai mudando ao longo do tempo)

$$\frac{dt}{dk_3} = -\frac{1}{ak_1} \Rightarrow K_3 = k_3 + ak_1 t. \tag{5.15}$$

A equação (5.10) pode então ser manipulada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_{3,3}}{\partial t} - ak_1 \frac{\partial\Phi_{3,3}}{\partial k_3} &= \left[\frac{4ak_1 k_3}{k^2} - 2\nu k^2 \right] \Phi_{3,3}, \\
\frac{\partial\Phi_{3,3}}{\partial k_3} - \frac{1}{ak_1} \frac{\partial\Phi_{3,3}}{\partial t} &= -\frac{1}{ak_1} \left[\frac{4ak_1 k_3}{k^2} - 2\nu k^2 \right] \Phi_{3,3}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Neste ponto, note que a maneira mais fácil de prosseguir com a álgebra é considerar a derivada total em relação a k_3 , e *não* em relação a t (o que seria mais “natural”, pois coincidiria com a derivada material de mecânica dos fluidos):

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi_{3,3}}{dk_3} &= \left[-\frac{4k_3}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} + \frac{2\nu}{ak_1} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \right] \Phi_{3,3}, \\
\int_{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, K_3, 0)}^{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t)} \frac{d\Psi}{\Psi} &= \int_{K_3}^{k_3} \left[-\frac{4u}{k_1^2 + k_2^2 + u^2} + \frac{2\nu}{ak_1} (k_1^2 + k_2^2 + u^2) \right] du \\
\ln \frac{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t)}{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, K_3, 0)} &= -\left[2 \ln(k_1^2 + k_2^2 + u^2) \right]_{K_3}^{k_3} + \left[\frac{2\nu}{ak_1} \left((k_1^2 + k_2^2)u + \frac{u^3}{3} \right) \right]_{K_3}^{k_3} \\
\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) &= \Phi_{3,3}(k_1, k_2, K_3, 0) \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^4} \exp \left\{ \left[\frac{2\nu}{ak_1} \left(b^2 u + \frac{u^3}{3} \right) \right]_{K_3}^{k_3} \right\} \blacksquare
\end{aligned} \tag{5.17}$$

A forma de (5.17) é particularmente útil para manipulações algébricas futuras, em que ela será parte do termo forçante das equações de evolução de outros $\Phi_{i,j}$'s, como por exemplo $\Phi_{1,3}$ (vide (5.4)); também para simplificar manipulações algébricas futuras nós fizemos

$$b^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \quad (5.18)$$

Deissler propõe como condição inicial para $\Phi_{3,3}$:

$$\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, 0) = \Phi_{3,3}(k_1, k_2, K_3, 0) = A(k^2 - k_3k_3) = A(k_1^2 + k_2^2) = Ab^2. \quad (5.19)$$

A introdução da condição inicial (5.19) diretamente em (5.17) produz

$$\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) = Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^4} \exp \left\{ \left[\frac{2\nu}{ak_1} \left(b^2u + \frac{u^3}{3} \right) \right]_{K_3}^{k_3} \right\} \blacksquare \quad (5.20)$$

Calculando agora a integral definida (5.17),

$$\ln \frac{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t)}{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, K_3, 0)} = \ln \left(\frac{(k_1^2 + k_2^2 + K_3^2)^2}{k^4} \right) - \frac{2\nu(K_3 - k_3)(K_3^2 + k_3K_3 + 3(k_1^2 + k_2^2))}{3ak_1}. \quad (5.21)$$

Como o objetivo da aplicação do método é encontrar a solução geral da equação diferencial (5.16), nós agora utilizamos (5.15) e eliminamos K_3 de (5.21), obtendo

$$\begin{aligned} \ln \frac{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t)}{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3 + ak_1t, 0)} &= \ln \left(\frac{(a^2k_1^2t^2 + 2ak_1k_3t + k^2)^2}{k^4} \right) \\ &\quad - \frac{2}{3}a^2k_1^2\nu t^3 - 2ak_1k_3\nu t^2 - 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)\nu t \Rightarrow \\ \Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) &= \Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3 + ak_1t, 0) \frac{(k_1^2 + k_2^2 + (k_3 + ak_1t)^2)^2}{k^4} \times \\ &\quad \exp \left[-(2/3)a^2k_1^2\nu t^3 - 2ak_1k_3\nu t^2 - 2k^2\nu t \right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

Esta é a *mesma* solução dada pela equação (5-331) do livro de Deissler (1998), que é da forma (na notação deste trabalho, que usa um gradiente na direção x_3 , e não na de Deissler, que usa um gradiente na direção x_2)

$$\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) = \frac{f(k_1, k_2, k_3 + ak_1t)}{k^4} \times \exp \left[-(2/3)a^2k_1^2\nu t^3 - 2ak_1k_3\nu t^2 - 2k^2\nu t \right]; \quad (5.23)$$

note que $f(\cdot)$ em (5.23) equivale a $\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3 + ak_1t, 0)[a^2k_1^2t^2 + 2ak_1k_3t + k^2]^2$ em (5.22). A introdução da condição inicial (5.19) produz

$$\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) = A(k_1^2 + k_2^2) \frac{(a^2k_1^2t^2 + 2ak_1k_3t + k^2)^2}{k^4} \exp \left[-(2/3)a^2k_1^2\nu t^3 - 2ak_1k_3\nu t^2 - 2k^2\nu t \right] \blacksquare \quad (5.24)$$

Esta é, essencialmente, a mesma equação (5-334) de Deissler (1998), com A no papel da constante $J_0/(12\pi^2)$ de Deissler. Aqui cabe notar que usar (5.19) como condição inicial para o espectro direcional $\Phi_{3,3}$ pode ser questionado com base no fato de que

$$R_{3,3}(\mathbf{0}, 0) = \langle u_3 u_3 \rangle = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{3,3}(\mathbf{k}, 0) d^3 \mathbf{k} = \infty! \quad (5.25)$$

Além disto, tudo parece indicar que a solução (5.24) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, o que parece contradizer a idéia de equilíbrio entre a produção e a dissipação. Isto é uma observação bem interessante: se for verdade, isto significa que, neste modelo, a dissipação age *diretamente* sobre

os números de onda correspondentes à produção, e também que há algo de não-físico na remoção dos termos de transferência inercial.

A introdução da condição inicial (5.19) diretamente em (5.17) produz um resultado algebricamente mais simples, e também mais fácil de ser manipulado:

$$\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) = Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^4} \exp \left\{ \left[\frac{2\nu}{ak_1} \left(b^2 u + \frac{u^3}{3} \right) \right]_{K_3}^{k_3} \right\} \blacksquare \quad (5.26)$$

5.2.3 A solução de $\Phi_{1,3}$

Considere agora a equação (5.4) para $\Phi_{1,3}$ na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial t} - ak_1 \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial k_3} &= \left[\frac{2ak_1 k_3}{k^2} - 2\nu k^2 \right] \Phi_{1,3} + a \left[\frac{2k_1^2}{k^2} - 1 \right] \Phi_{3,3}, \\ \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial k_3} - \frac{1}{ak_1} \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial t} &= - \left[\frac{2k_3}{k^2} - \frac{2\nu}{ak_1} k^2 \right] \Phi_{1,3} - \left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1} \right] \Phi_{3,3}, \\ \frac{d\Phi_{1,3}}{dk_3} &= - \left[\frac{2k_3}{k^2} - \frac{2\nu}{ak_1} k^2 \right] \Phi_{1,3} - \left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1} \right] \Phi_{3,3}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Embora monstruosa, esta é, no frigid dos ovos, apenas uma equação diferencial linear ordinária de ordem 1 não-homogênea. Uma maneira que parece bastante frutífera de atacar esta monstruosidade é usar o método de variação de constantes. Considere em geral o problema de resolver

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial k_3} - \frac{1}{ak_1} \frac{\partial \phi}{\partial t} + c(k_3)\phi &= f(k_3), \\ \frac{dt}{dk_3} &= -\frac{1}{ak_1} \Rightarrow k_3 = K_3 - ak_1 t, \\ \frac{d\phi}{dk_3} + a(k_3)\phi &= f(k_3), \end{aligned} \quad (5.28)$$

com condição inicial

$$\phi(K_3) = \phi_0. \quad (5.29)$$

Neste problema, é a dependência do termo forçante $f(k_3)$ de k_3 somente que condiciona a escolha de k_3 como a variável de integração no método das características.

A equação (5.28) pode ser resolvida da seguinte forma: considere a equação homogênea associada,

$$\frac{dh}{dx} + c(k_3)h = 0. \quad (5.30)$$

Ele pode ser facilmente resolvido. Considere uma solução *livre* do problema homogêneo, isto é: suponha que $h(x)$ resolve (5.30), mas não necessariamente a condição inicial (5.29) do problema (note que basta que este h seja uma função de k_3). Tente agora uma solução de (5.28) na forma

$$\phi = g(k_3)h(k_3)$$

onde $g(k_3)$ é uma função a determinar. Esta função deverá ser tal que ϕ atenda à condição inicial (5.29). Substituindo em (5.28),

$$\begin{aligned} \frac{d(gh)}{dk_3} &= c(k_3)gh = f(k_3), \\ g \frac{dh}{dk_3} + gc(k_3)h + h \frac{dg}{dk_3} &= f(k_3), \\ g \left[\frac{dh}{dk_3} + c(k_3)h \right] + h \frac{dg}{dk_3} &= f(k_3), \\ \frac{dg}{dk_3} &= \frac{f(k_3)}{h(k_3)}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Vamos olhar cuidadosamente para a condição inicial:

$$g(K_3)h(K_3) = \phi_0 \Rightarrow g(K_3) = \frac{\phi_0}{h(K_3)}, \quad (5.32)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{g(K_3)}^{g(k_3)} &= \int_{K_3}^{k_3} \frac{f(u)}{h(u)} du, \\ g(k_3) - \frac{\phi_0}{h(K_3)} &= \int_{K_3}^{k_3} \frac{f(u)}{h(u)} du, \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde

$$\phi(k_3) = h(k_3)g(k_3) = h(k_3) \left[\frac{\phi_0}{h(K_3)} + \int_{K_3}^{k_3} \frac{f(u)}{h(u)} du, \right] \blacksquare \quad (5.34)$$

Observe como (5.34) atende por construção à condição inicial (5.29).

De volta agora à solução de (5.27): a equação homogênea associada é

$$\frac{dh}{dk_3} = - \left[\frac{2k_3}{k^2} - \frac{2\nu k^2}{ak_1} \right] h, \quad (5.35)$$

a qual é bastante fácil de ser obtida, desde que não se tente colocar o lado direito acima sobre um denominador comum:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{h} &= - \left[\frac{2k_3}{k^2} - \frac{2\nu k^2}{ak_1} \right] dk_3, \\ \ln h &= - \ln k^2 + \frac{2\nu}{ak_1} \left[(k_1^2 + k_2^2)k_3 + \frac{k_3^3}{3} \right], \\ h &= \frac{1}{k^2} \exp \left\{ \frac{2\nu}{ak_1} \left[b^2 k_3 + \frac{k_3^3}{3} \right] \right\} \blacksquare \end{aligned} \quad (5.36)$$

Note como não há necessidade de nos preocuparmos com a condição inicial em (5.36). Note também que o argumento de $\exp\{\cdot\}$ também aparece na solução para $\Phi_{3,3}$ na forma (5.26). Para simplificar um pouco a álgebra e poupar espaço na página, é conveniente fazer

$$F(u) \equiv \frac{2\nu}{ak_1} \left[b^2 u + \frac{u^3}{3} \right]. \quad (5.37)$$

A solução para $\Phi_{1,3}(k_1, k_2, k_3, t)$ agora envolve, basicamente, a aplicação de (5.34); para isto, precisamos de

$$\Phi_{1,3}(k_1, k_2, K_3, 0) = A((b^2 + K_3^2)\delta_{1,3} - k_1 K_3) = -Ak_1 K_3. \quad (5.38)$$

O termo forçante (não-homogêneo) de (5.27) é

$$\begin{aligned} f(k_1, k_2, k_3, t) &= - \left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1} \right] \Phi_{3,3} \\ &= - \left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1} \right] Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^4} [e^{F(k_3) - F(K_3)}] \end{aligned} \quad (5.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{f}{h} &= - \left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1} \right] Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^4} [e^{F(k_3) - F(K_3)}] k^2 e^{-F(k_3)} \\ &= - \left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1} \right] Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^2} e^{-F(K_3)} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Aplicando então (5.34):

$$\begin{aligned} \Phi_{1,3} &= \frac{1}{k^2} e^{F(k_3)} \left\{ -Ak_1 K_3 (b^2 + K_3^2) e^{-F(K_3)} - \int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{2k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{1}{k_1} \right] Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{(b^2 + u^2)} e^{-F(K_3)} du \right\} \\ &= \frac{(b^2 + K_3^2)}{k^2} e^{F(k_3) - F(K_3)} \left\{ -Ak_1 K_3 - Ab^2 (b^2 + K_3^2) \int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{2k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{1}{k_1} \right] \frac{1}{(b^2 + u^2)} du \right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

As integrais envolvidas não são difíceis:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2k_1}{(b^2 + u^2)^2} - \frac{1}{k_1(b^2 + u^2)} \right) du &= \frac{2k_1}{2b^3} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{2k_1}{2b^2} \frac{u}{(u^2 + b^2)} - \frac{1}{k_1 b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} \\ &= \left(\frac{-k_2^2}{k_1 b^3} \right) \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{k_1}{b^2} \frac{u}{(u^2 + b^2)} \blacksquare \end{aligned} \quad (5.42)$$

Levando agora (5.42) em (5.41),

$$\begin{aligned} \Phi_{1,3} &= \frac{(b^2 + K_3^2)}{k^2} e^{F(k_3) - F(K_3)} \left\{ -Ak_1 K_3 - Ab^2 (b^2 + K_3^2) \left[\left(\frac{-k_2^2}{k_1 b^3} \right) \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{k_1}{b^2} \frac{u}{(u^2 + b^2)} \right]_{K_3}^{k_3} \right\} \\ &= A \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^2} e^{F(k_3) - F(K_3)} \left\{ \frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\operatorname{arctg} \frac{k_3}{b} - \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 k_3}{k^2} \right\} \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} &= A \frac{(b^2 + (k_3 + ak_1 t)^2)^2}{k^2} \exp \left[-2\nu t(k^2 + ak_1 k_3 t + \frac{1}{3} a^2 k_1^2 t^2) \right] \times \\ &\left\{ \frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\operatorname{arctg} \frac{k_3}{b} - \operatorname{arctg} \frac{(k_3 + ak_1 t)}{b} \right) - \frac{k_1 k_3}{k^2} \right\} \blacksquare \end{aligned} \quad (5.44)$$

5.2.4 A solução de $\Phi_{3,1}$

A equação diferencial (5.8) para $\Phi_{3,1}$ é

$$\frac{\partial \Phi_{3,1}}{\partial t} - ak_1 \frac{\partial \Phi_{3,1}}{\partial k_3} = \left[\frac{2ak_1 k_3}{k^2} - 2\nu k^2 \right] \Phi_{3,1} + a \left[\frac{2k_1^2}{k^2} - 1 \right] \Phi_{3,3}. \quad (5.45)$$

Note que ela é idêntica a (5.27). A condição inicial proposta por Deissler,

$$\Phi_{3,1}(k_1, k_2, k_3, 0) = -Ak_1 k_3, \quad (5.46)$$

também é igual; portanto,

$$\Phi_{3,1} = \Phi_{1,3} \blacksquare \quad (5.47)$$

5.2.5 A solução de $\Phi_{1,1}$

A equação diferencial (5.2), juntamente com a condição de simetria (5.47), produz

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{1,1}}{\partial t} - ak_1 \frac{\partial\Phi_{1,1}}{\partial k_3} &= -2\nu k^2 \Phi_{1,1} + 2a \left[\frac{2k_1^2}{k^2} - 1 \right] \Phi_{1,3} \\ \frac{\partial\Phi_{1,1}}{\partial k_3} - \frac{1}{ak_1} \frac{\partial\Phi_{1,1}}{\partial t} &= \frac{2\nu}{ak_1} k^2 \Phi_{1,1} - \left[\frac{4k_1}{k^2} - \frac{2}{k_1} \right] \Phi_{1,3} \\ \frac{d\Phi_{1,1}}{dk_3} &= \frac{2\nu}{ak_1} k^2 \Phi_{1,1} - \left[\frac{4k_1}{k^2} - \frac{2}{k_1} \right] \Phi_{1,3}\end{aligned}\quad (5.48)$$

Da mesma maneira que antes, vamos procurar a solução com o método de variação de constantes. A equação homogênea associada de (5.48) é

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dk_3} &= \frac{2\nu}{ak_1} k^2 h \\ \frac{dh}{h} &= \frac{2\nu}{ak_1} (b^2 + k_3^2) dk_3 \\ \ln h &= \frac{2\nu}{ak_1} \left(b^2 k_3 + \frac{k_3^3}{3} \right) \\ h &= e^{F(k_3)} \blacksquare\end{aligned}\quad (5.49)$$

O termo forçante (não-homogêneo) de (5.48) é

$$\begin{aligned}f &= - \left[\frac{4k_1}{k^2} - \frac{2}{k_1} \right] \Phi_{1,3} \\ &= - \left[\frac{4k_1}{k^2} - \frac{2}{k_1} \right] A \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^2} e^{F(k_3) - F(K_3)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \arctg \frac{u}{b} \Big|_{K_3}^{k_3} - \frac{k_1 k_3}{k^2} \right]\end{aligned}\quad (5.50)$$

donde

$$\frac{f}{h} = - \left[\frac{4k_1}{k^2} - \frac{2}{k_1} \right] A \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^2} e^{-F(K_3)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \arctg \frac{u}{b} \Big|_{K_3}^{k_3} - \frac{k_1 k_3}{k^2} \right]\quad (5.51)$$

A condição inicial do problema é

$$\Phi_{1,1}(k_1, k_2, K_3, 0) = A((k_1^2 + k_2^2 + K_3^2) - k_1^2) = A(k_2^2 + K_3^2)\quad (5.52)$$

Aplicando (5.34),

$$\begin{aligned}\Phi_{1,1} &= e^{F(k_3)} \left\{ A(k_2^2 + K_3^2) e^{-F(K_3)} - \int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{4k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{2}{k_1} \right] A \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{(b^2 + u^2)} e^{-F(K_3)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\arctg \frac{u}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 u}{(b^2 + u^2)} \right] du \right\} \\ &= A e^{F(k_3) - F(K_3)} \left\{ (k_2^2 + K_3^2) - (b^2 + K_3^2)^2 \int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{4k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{2}{k_1} \right] \frac{1}{(b^2 + u^2)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\arctg \frac{u}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 u}{(b^2 + u^2)} \right] du \right\} \\ &= A e^{F(k_3) - F(K_3)} (b^2 + K_3^2)^2 \left\{ \frac{(k_2^2 + K_3^2)}{(b^2 + K_3^2)^2} - \int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{4k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{2}{k_1} \right] \frac{1}{(b^2 + u^2)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\arctg \frac{u}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 u}{(b^2 + u^2)} \right] du \right\}\end{aligned}\quad (5.53)$$

Há 6 integrais para serem calculadas em (5.53), já com seus respectivos sinais, *incluindo o sinal de menos na frente do símbolo de integral*:

$$\begin{aligned} -\frac{4k_2^2}{b} \int \frac{1}{(b^2 + u^2)^2} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} du &= \frac{k_2^2}{b^4(b^2 + u^2)} \left[(b^2 + u^2) \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b} + 2bu \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + b^2 \right] \\ &= -\left(\frac{k_2^2}{b^4} \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b} + \frac{2k_2^2 u}{b^3(b^2 + u^2)} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{k_2^2}{b^2(b^2 + u^2)} \right), \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} +\frac{4k_2^2}{b} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \int \frac{du}{(b^2 + u^2)^2} du &= \frac{4k_2^2}{b} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \left[\frac{1}{2b^3} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{u}{2b^2(b^2 + u^2)} \right] \\ &= \frac{2k_2^2}{b^4} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{2k_2^2}{b^3} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \frac{u}{(b^2 + u^2)}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$+2k_1^2 \int \frac{2u}{(b^2 + u^2)^3} du = -\frac{k_1^2}{(b^2 + u^2)^2}, \quad (5.56)$$

$$+\frac{2k_2^2}{k_1^2 b} \int \frac{1}{(b^2 + u^2)} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} du = \frac{k_2^2}{k_1^2 b^2} \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b}, \quad (5.57)$$

$$-\frac{2k_2^2}{k_1^2 b} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \int \frac{1}{(b^2 + u^2)} du = -\frac{2k_2^2}{k_1^2 b^2} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} \quad (5.58)$$

$$-\int \frac{2u}{(b^2 + u^2)^2} du = \frac{1}{(b^2 + u^2)}. \quad (5.59)$$

Coletamos agora os termos comuns das equações acima e seus coeficientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b} &: -\frac{k_2^2}{b^4} + \frac{k_2^2}{k_1^2 b^2} = \frac{k_2^4}{b^4 k_1^2}; \\ \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} &: \frac{2k_2^2}{b^4} - \frac{2k_2^2}{k_1^2 b^2} = -\frac{2k_2^4}{b^4 k_1^2}; \\ \operatorname{arctg} \frac{u}{b} &: -\frac{2k_2^2 u}{b^3(b^2 + u^2)}; \\ \frac{u}{b^2 + u^2} &: \frac{2k_2^2}{b^3} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b}; \\ \frac{1}{b^2 + u^2} &: -\frac{k_2^2}{b^2} + 1 = \frac{k_1^2}{b^2}; \\ \frac{1}{(b^2 + u^2)^2} &: -k_1^2. \end{aligned}$$

A reunião dos termos envolvendo arctg e arctg^2 produz

$$\frac{k_2^4}{b^4 k_1^2} \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b} - \frac{2k_2^4}{b^4 k_1^2} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} - \frac{2k_2^2 u}{b^3(b^2 + u^2)} \operatorname{arctg} \frac{u}{b}. \quad (5.60)$$

A reunião dos 3 últimos termos produz a expressão *relativamente simples*:

$$\frac{u}{b^3(b^2 + u^2)^2} \left[bk_1^2 u + 2k_2^2 \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} (u^2 + b^2) \right] \quad (5.61)$$

Olhando para o último termo de (5.60) e o de (5.61), é evidente que é preferível coletá-los no fator comum $(2k_2^2u)/(b^3(b^2 + u^2)^2)$; a integral *indefinida* em (5.53), portanto, é

$$\int \left[\frac{4k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{2}{k_1} \right] \frac{1}{(b^2 + u^2)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\arctg \frac{u}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 u}{(b^2 + u^2)} \right] du = \frac{k_1^2 u^2}{b^2 (b^2 + u^2)^2} + \frac{k_2^4}{b^4 k_1^2} \arctg^2 \frac{u}{b} - \frac{2k_2^4}{b^4 k_1^2} \arctg \frac{K_3}{b} \arctg \frac{u}{b} + \frac{2k_2^2 u}{b^3 (b^2 + u^2)} \left(\arctg \frac{K_3}{b} - \arctg \frac{u}{b} \right). \quad (5.62)$$

A integral definida em (5.53), já utilizando $(b^2 + k_3^2) = k^2$, é

$$\int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{4k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{2}{k_1} \right] \frac{1}{(b^2 + u^2)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\arctg \frac{u}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 u}{(b^2 + u^2)} \right] du = \frac{k_1^2}{b^2} \left(\frac{k_3^2}{k^4} - \frac{K_3^2}{(b^2 + K_3^2)^2} \right) - \frac{2k_2^2 k_3}{b^3 k^2} \left[\arctg \frac{k_3}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right] + \frac{k_2^4}{b^4 k_1^2} \left[\arctg \frac{k_3}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right]^2 \quad (5.63)$$

A solução final para $\Phi_{1,1}$ fica

$$\Phi_{1,1} = Ae^{F(k_3) - F(K_3)} (b^2 + K_3^2)^2 \left\{ \frac{(k_2^2 + K_3^2)}{(b^2 + K_3^2)^2} + \frac{k_1^2}{b^2} \left(\frac{k_3^2}{k^4} - \frac{K_3^2}{(b^2 + K_3^2)^2} \right) - \frac{2k_2^2 k_3}{b^3 k^2} \left[\arctg \frac{k_3}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right] + \frac{k_2^4}{b^4 k_1^2} \left[\arctg \frac{k_3}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right]^2 \right\} \quad (5.64)$$

Esta expressão é equivalente (embora seja um pouco mais compacta) à equação (5-337) de Deissler (1998, p. 227).

Capítulo 6

Conclusões e recomendações

6.1 Conclusões

A turbulência atmosférica próximo à superfície da terra é fortemente anisotrópica, como demonstram [Shen e Warhaft \(2000\)](#), [Warhaft \(2000\)](#), e [Chamecki e Dias \(2004\)](#). Esta anisotropia é claramente verificável principalmente nas funções de estrutura de ordem 3, e se deve principalmente aos forçantes anisotrópicos de larga escala. Conforme proposto por [Claussen \(1985\)](#), e utilizado por [Moraes e Epstein \(1987\)](#), [Moraes e Goedert \(1988\)](#), [Dias e Brutsaert \(1998\)](#) e [Chamecki e Dias \(2004\)](#), estes forçantes anisotrópicos podem ser incorporados em modelos espectrais de turbulência. Nos trabalhos acima, e no capítulo 3, o termo de produção é introduzido de maneira aproximada, em função do espectro de energia cinética turbulenta $E_e(k)$, e o modelo resultante consiste em uma única equação diferencial ordinária em k . Nossa pesquisa mostrou que é possível utilizar esta abordagem para modelar um fenômeno importante, que é a “corcova” no espectro de energia cinética turbulenta. [Hill \(1978\)](#) modelou uma corcova similar no espectro de *temperatura*, a qual ele atribuiu à presença de uma faixa viscosa-convectiva (quando a viscosidade cinemática ν_u é muito maior que a difusividade molecular do calor ν_θ : $\nu_u \gg \nu_\theta$, ou uma faixa inercial-difusiva (ao contrário, quando $\nu_u \ll \nu_\theta$). Esta modelagem é fundamental para aplicações de cintilometria ótica na camada-limite atmosférica [Hill \(1991\)](#), [Hill \(1997\)](#). Nossos resultados sugerem que o mesmo fenômeno (a “corcova” no espectro de temperatura) pode ter uma causa diferente da proposta por [Hill \(1978\)](#), e ser simplesmente o resultado da corcova equivalente em $E_e(k)$; neste caso, mesmo fluidos com $\nu_u/\nu_\theta = 1$ (número de Prandtl igual a 1) apresentariam uma corcova no espectro de temperatura.

O modelo original de [Pao \(1965\)](#) para o espectro de energia cinética turbulenta também pode ser estendido para situações *transientes*, tais como o decaimento da turbulência em um túnel de vento. Este é um resultado totalmente novo (tanto quanto seja de nosso conhecimento), obtido analiticamente por meio do método das características, e descrito no capítulo 4. Neste capítulo, por simplicidade, nós não modelamos a corcova do espectro $E_e(k)$, o que será feito na continuação desta pesquisa. A modelagem de fenômenos transientes na camada-limite atmosférica pode se beneficiar muito da abordagem proposta neste capítulo, para uma melhor compreensão da transição de condições instáveis para condições estáveis que ocorre com o pôr-do-sol, e também para a compreensão da camada residual acima da camada-limite estável noturna. A camada residual pode ser extremamente importante em episódios de poluição atmosférica noturna (quando os poluentes desta camada podem retornar à superfície por acoplamento dinâmico com a camada-limite estável ([Fochesatto et al., 2001](#)))

Finalmente, o capítulo 5 mostrou como é possível modelar explicitamente a anisotropia das grandes escalas da turbulência. Esta modelagem tem sido até hoje totalmente linear, baseada na teoria de distorção rápida de [Batchelor e Proudman \(1954\)](#). Esta teoria tem sido aplicada com sucesso, por exemplo, por [Deissler \(1961\)](#) para estudar o efeito do cisalhamento sobre

o espectro de energia cinética turbulenta; [Deissler \(1962\)](#) para analisar o efeito estabilizador de um gradiente estável de temperatura sobre a turbulência; [Hanazaki e Hunt \(1996\)](#) para analisar também espectros de energia cinética turbulenta na presença de gradientes estáveis de temperatura, e [Fernando e Hunt \(1997\)](#) para analisar o efeito de interfaces de fluidos com diferentes densidades sobre a turbulência. Uma revisão abrangente, embora não muito recente, pode ser encontrada em [Hunt e Carruthers \(1990\)](#). Embora nossa pesquisa não tenha gerado (até o momento) novos resultados baseados na teoria de distorção rápida, o resultado conjunto dos capítulos 3, 4 e 5 abre caminho para uma teoria *não-linear* de distorção, que poderá permitir incorporar simultaneamente os efeitos das grandes escalas e a cascata de energia de Kolmogorov (e a formação da faixa inercial, chegando até à corcova do espectro de energia cinética turbulenta e toda a faixa de dissipação) em um único modelo espectral.

Isto é fundamental para a dedução de modelos de difusão turbulenta de poluentes solidamente baseados tanto nas características do espectro quanto na teoria de similaridade de Monin-Obukhov [Moraes e Goedert \(1988\)](#).

6.2 Recomendações

Os modelos de corcova do capítulo 3 são muito difíceis de calibrar, uma vez que eles são gerados para $E_e(k)$, mas são verificados contra espectros unidimensionais $F_{11}(k_1)$, obtidos por meio da integral (2.40). A integral, que precisa ser calculada numericamente, torna qualquer método de calibração automática muito lento. Conseqüentemente, é importante avançar na obtenção de aproximações analíticas para $F_{11}(k_1)$ que permitam calibrações mais precisas da corcova do que as que conseguimos obter.

A corcova situa-se na fronteira entre a faixa inercial e a faixa de dissipação, e pode ter uma importância grande no cálculo da taxa de dissipação de energia cinética turbulenta ϵ_e . Por exemplo, o modelo de 7 parâmetros proposto por [Kang et al. \(2003\)](#) não é capaz de reproduzir os valores medidos de ϵ_e , e um modelo alternativo proposto por [Lamorgese et al. \(2005\)](#) também não foi capaz de reproduzir aspectos importantes do espectro de energia cinética turbulenta. Portanto, um passo lógico é a introdução de um modelo de corcova na modelagem do decaimento de turbulência isotrópica em um túnel de vento desenvolvida no capítulo 4.

Finalmente, a modelagem da anisotropia das grandes escalas deve ser incorporada à modelagem da faixa inercial e da corcova por meio de uma nova teoria não-linear de distorção rápida, conforme esboçado no capítulo 5. Este é um esforço considerável porque envolve a modelagem do tensor espectral $\Phi_{i,j}$ e novos termos de fechamento para $\Phi_{i,jk}$. Esta alternativa, entretanto, promete uma nova abordagem para a formulação da difusividade turbulenta de escalares na atmosfera firmemente baseada na dinâmica da turbulência.

Apêndice A

Motivação para a formulação de modelos de transferência

Suponha que $\widehat{f}(k)$ seja uma função definida em $(-\infty, +\infty)$, e que

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0; \quad (\text{A.1})$$

então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\widehat{f}}{dk} dk = 0. \quad (\text{A.2})$$

A idéia óbvia dos modelos de fechamento simples de transferência inercial, portanto, é escrever

$$\mathcal{T}(k) = \frac{d\widehat{f}}{dk}. \quad (\text{A.3})$$

Para o caso tridimensional, o uso de transformada de Fourier ajuda um pouco. Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [x_l f(\mathbf{x})] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} x_l f(\mathbf{x}) e^{-ik_m x_m} d^3 \mathbf{x}, \\ &= -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_l} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} f(x) [-ix_l e^{-ik_m x_m}] d^3 \mathbf{x} \\ &= i \frac{\partial}{\partial k_l} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} f(x) e^{-ik_m x_m} d^3 \mathbf{x} \\ &= i \frac{\partial \widehat{f}}{\partial k_l}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Segue-se imediatamente que:

$$\mathcal{F} \left[x_l \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] = -\frac{\partial}{\partial k_l} (k_n \widehat{f}) \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial k_l} d^3 \mathbf{k} = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \frac{\partial (k_n \widehat{f})}{\partial k_l} d^3 \mathbf{k} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Apêndice B

Uma aproximação para $zK_1(z)$

A derivada logarítmica da função gama, ou função Digamma, ou função Psi, é (para argumentos inteiros)

$$\psi(1) = -\gamma, \quad (\text{B.1})$$

$$\psi(k+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}, \quad (\text{B.2})$$

onde $\gamma = 0,57721566\dots$ é a constante de Euler. [Lebedev \(1972\)](#) dá uma fórmula geral para $K_n(z)$ (equação 5.7.11); para K_1 ela se torna

$$K_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{z} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \left[2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+2) \right]. \quad (\text{B.3})$$

Segue-se que

$$zK_1(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+2}}{k!(k+1)!} \left[2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+2) \right]. \quad (\text{B.4})$$

Os seguintes valores da função Digamma são relevantes para séries truncadas e $z \rightarrow 0$:

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(2) = -\gamma + 1, \quad \psi(3) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2}. \quad (\text{B.5})$$

Portanto, a expansão até $k = 1$ é

$$zK_1(z) \approx 1 + \left(\frac{z}{2} \right)^2 \left[2 \ln \frac{z}{2} + 2\gamma - 1 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^4 \left[2 \ln \frac{z}{2} + 2\gamma - \frac{5}{2} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Apêndice C

O espectro de Pope e de Kang et al.

O espectro é escrito em termos da escala integral ℓ ; para re-escrevê-lo em termos de R_ℓ e de kr_ϵ como no resto deste texto, usamos (3.66) e fazemos

$$k\ell = kr_\epsilon \frac{\ell}{r_\epsilon} = kr_\epsilon R_\ell^{3/4}. \quad (\text{C.1})$$

O espectro originalmente proposto por Pope (2000) é

$$E_C^{\text{P}}(k) = \alpha_e \left[\frac{(kr_\epsilon R_\ell^{3/4})}{\left[(kr_\epsilon R_\ell^{3/4})^{a_2} + a_1 \right]^{1/a_2}} \right]^{5/3+a_3} \exp[-a_4 kr_\epsilon]; \quad (\text{C.2})$$

Kang et al. (2003) propuseram modelar a corcova do espectro por meio da inclusão de um fator adicional:

$$E_C^{\text{K}} = E_C^{\text{P}} \times \left[1 + a_5 \left(\frac{1}{\pi} \arctg(a_6 \log_{10}(kr_\epsilon) + a_7) + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (\text{C.3})$$

Os valores das constantes, segundo Kang et al. (2003), são: $a_1 = 0,39$, $a_2 = 1,2$, $a_3 = 4,0$, $a_5 = 0,522$, $a_6 = 10,0$ e $a_7 = 12,58$.

Apêndice D

A Gamma incompleta e integrais exponenciais

Dada a função Gamma,

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (\text{D.1})$$

A *gama incompleta* é definida pela representação integral

$$\gamma(x, a) \equiv \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (\text{D.2})$$

e a gama incompleta complementar por

$$\Gamma(x, a) \equiv \int_a^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (\text{D.3})$$

$\Gamma(x, a)$ tem a vantagem de ser definida para valores negativos e positivos de x — de fato, $\Gamma(x, a)$ é uma função inteira para valores fixos de a ([Lebedev, 1972](#), cap. 1, Exercício 10). Para $x \neq 0, -1, -2, \dots$, a gama incompleta e a gamma incompleta complementar podem ser obtidas por meio de

$$\gamma(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} a^{x+n}; \quad \Gamma(x, a) = \Gamma(x) - \gamma(x, a). \quad (\text{D.4})$$

Note que, ao contrário da integral (D.2), a série (D.4) na verdade converge mesmo quando $x < 0$, desde que $x \neq 0, -1, -2, \dots$. A função $\gamma(x, 1)$ é mostrada na figura D.1.

Quando $x = 0, -1, -2, \dots$, e para $a = 1$, (D.4) falha, mas nós podemos lançar mão das integrais exponenciais

$$E_n(x) \equiv \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t^n} dt, \quad (\text{D.5})$$

definidas em [Abramowitz e Stegun \(1972\)](#), Eq. 5.1.4, e que possuem a expansão em série

$$E_n(x) = - \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-x)^m}{(m-n+1)m!} + \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} [-\ln x + \psi(n)] - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(m-n+1)m!}. \quad (\text{D.6})$$

Agora, fazendo-se $z = 1$ e $n = 1 - x$, obtém-se para $x = 0, -1, -2, \dots$,

$$E_{1-x}(1) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} dt = \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x, 1). \quad (\text{D.7})$$

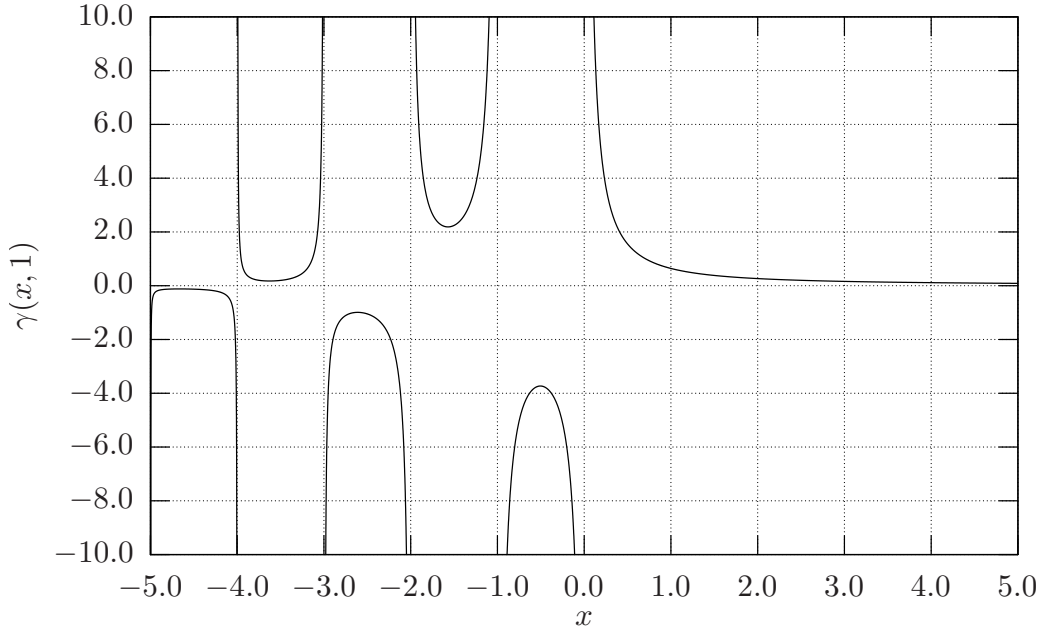


Figura D.1: A função gama incompleta $\gamma(x, 1)$

Finalmente, se $a \neq 1$ e $x = 0, -1, -2, \dots$, faça

$$\begin{aligned}
 E_{1-x}(a) &= \int_{t=1}^{\infty} \frac{e^{-at}}{t^{1-x}} dt \\
 &= \int_{t=1}^{\infty} t^{x-1} e^{-at} dt \\
 &= \int_{s=a}^{\infty} \left(\frac{s}{a}\right)^{x-1} e^{-s} \frac{ds}{a} \\
 &= \frac{1}{a^x} \int_a^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds = \frac{1}{a^x} \Gamma(x, a).
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

A função hipergeométrica generalizada (Lebedev, 1972) é definida como

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \gamma_1, \dots, \gamma_q \end{matrix} ; z \right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^p (\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^q (\gamma_s)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{D.9}$$

onde

$$(\alpha_r)_0 = 1, \quad (\alpha_r)_k = \frac{\Gamma(\alpha_r + k)}{\Gamma(\alpha_r)} = \alpha_r(\alpha_r + 1) \cdots (\alpha_r + k - 1), \quad k = 1, 2, \dots \tag{D.10}$$

Apêndice E

A função $\text{Hil}(x, p, a)$

Defina, para $x > 0$,

$$\text{Hil}(x, p, a) \equiv \int_1^x \xi^p (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} d\xi. \quad (\text{E.1})$$

Desejamos produzir uma aproximação simples, e suficientemente boa para $\text{Hil}(x, p, a)$ para $p = 1/3$, $p = -5/3$ e $p = -7/3$, e para uma gama de a 's tão grande quanto possível, de forma a eliminar a necessidade de calcular integrais numéricas.

Inicialmente, note que

$$\text{Hil}(1, p, a) \equiv 0; \quad (\text{E.2})$$

portanto, qualquer aproximação que produzamos deve atender a esta condição.

Considere $0 < \xi < 1$; aproximando-se $(\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}}$ em série de Taylor em torno de $\xi = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} \xi^p (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} &= \xi^p \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \frac{1}{3a} \xi^{2a} + \frac{1}{2!} \frac{1}{3a} \left(\frac{1}{3a} - 1 \right) \xi^{4a} + \frac{1}{3!} \frac{1}{3a} \left(\frac{1}{3a} - 1 \right) \left(\frac{1}{3a} - 2 \right) \xi^{6a} + \dots \right] \\ &= \xi^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \xi^{2an} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \xi^{2an+p}. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Integrando-se agora a série termo a termo entre 1 e x , obtém-se

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow \int_1^x \xi^p (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \mathcal{H}_{+,1}(x, p, a, n), \quad (\text{E.4})$$

onde

$$\mathcal{H}_{+,1}(x, p, a, n) = \begin{cases} \frac{1}{2an+p+1} [x^{2an+p+1} - 1], & 2an + p + 1 \neq 0, \\ \ln x, & 2an + p + 1 = 0. \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

Em (E.3) e (E.4), devemos interpretar que

$$\prod_{j=0}^{-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) = 1. \quad (\text{E.6})$$

Em virtude de a série ter sido desenvolvida em torno de $x = 0$, é de se esperar que (E.4) seja uma boa aproximação para $0 < x \leq 1$; note que ela atende por construção à condição (E.2).

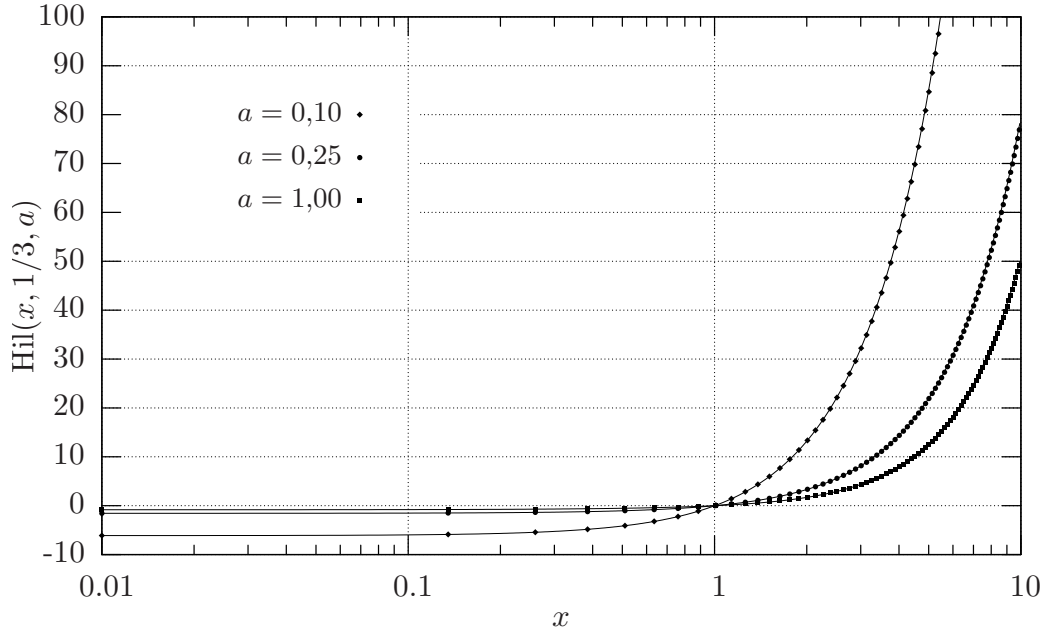


Figura E.1: Função $\text{Hil}(x, 1/3, a)$: comparação entre integração numérica (símbolos) e cálculo com as séries (E.4) e (E.8) (linhas contínuas).

Considere agora $1 < \xi < \infty$; o “truque” é fazer uma expansão, em torno de zero, na variável $\eta = 1/\xi$:

$$\begin{aligned}
 \xi^p \left(\frac{1}{\eta^{2a}} + 1 \right)^{\frac{1}{3a}} &= \frac{\xi^p}{\eta^{2/3}} (1 + \eta^{2a}) \\
 &= \xi^{p+2/3} \left(1 + \frac{1}{\xi^{2a}} \right)^{\frac{1}{3a}} \\
 &= \xi^{p+2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \xi^{-2an} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \xi^{-2an+p+2/3} \tag{E.7}
 \end{aligned}$$

Novamente, integramos a série resultante entre 1 e x , obtendo

$$1 < x < \infty \Rightarrow \int_1^x \xi^p (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \mathcal{H}_{-,5/3}(x, p, a, n), \tag{E.8}$$

onde

$$\mathcal{H}_{-,5/3}(x, p, a, n) = \begin{cases} \frac{1}{-2an+p+5/3} [x^{-2an+p+5/3} - 1], & -2an + p + 5/3 \neq 0, \\ \ln x, & -2an + p + 5/3 = 0. \end{cases} \tag{E.9}$$

Em virtude da expansão em série utilizada, é de se esperar que (E.8) seja boa para $1 < x < \infty$.

As figuras E.1, E.2 e E.3 mostram uma comparação do cálculo de $\text{Hil}(x, p, a)$ por meio de integração numérica com as séries (E.4) e (E.8), para $a = 0,1$, $a = 0,25$ e $a = 1,00$ respectivamente.

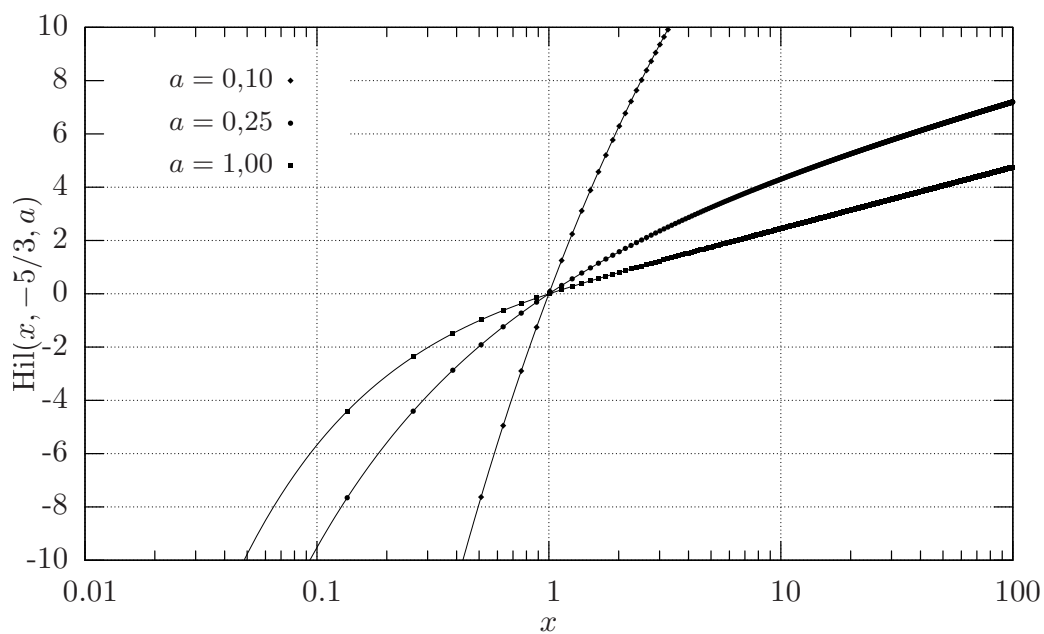


Figura E.2: Função $\text{Hil}(x, -5/3, a)$: comparação entre integração numérica (símbolos) e cálculo com as séries (E.4) e (E.8) (linhas contínuas).

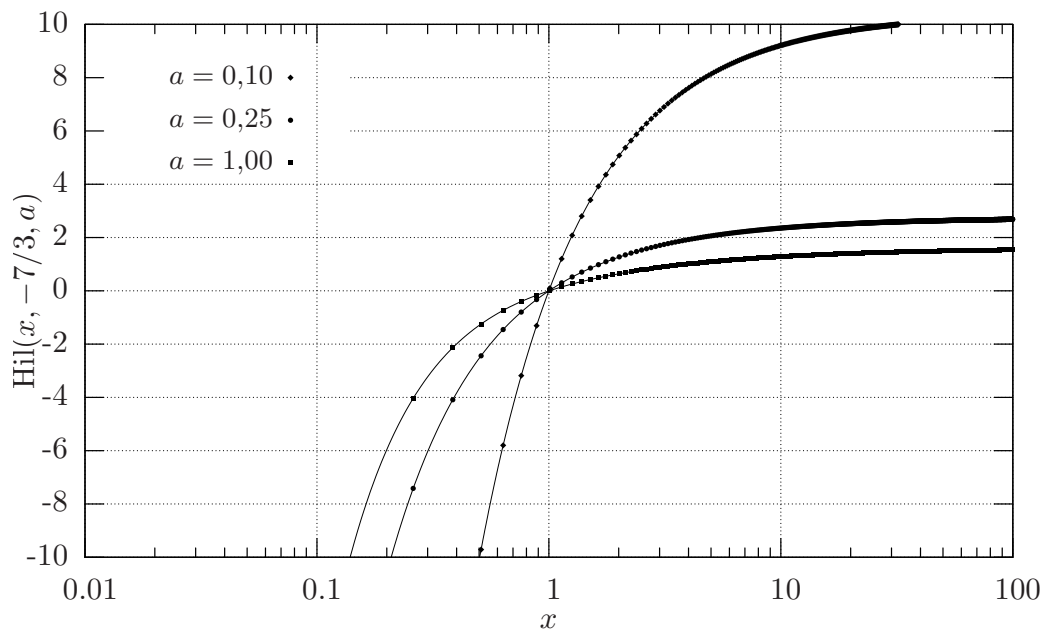


Figura E.3: Função $\text{Hil}(x, -7/3, a)$: comparação entre integração numérica (símbolos) e cálculo com as séries (E.4) e (E.8) (linhas contínuas).

Apêndice F

A função $\text{Epi}(x)$

Dada a integral de um produto de exponenciais na forma

$$\text{Epi}(x) \equiv \int_0^{\infty} \exp[-u - xu^{-1/3}] du, \quad (\text{F.1})$$

procuramos uma série para o cálculo eficiente de $\text{Epi}(x)$. Para isto, faça

$$\text{Epi}(x) = \text{Epi}_0(x) + \text{Epi}_1(x) = \int_0^1 \exp[-u - xu^{-1/3}] du + \int_1^{\infty} \exp[-u - xu^{-1/3}] du. \quad (\text{F.2})$$

Na primeira integral, substitua:

$$t = u^{-1/3}, \quad u = t^{-3}, \quad du = -3t^{-4}, \quad (\text{F.3})$$

donde

$$\begin{aligned} \text{Epi}_0(x) &= -3 \int_1^0 t^{-4} e^{-(xt + \frac{1}{t^3})} dt \\ &= 3 \int_1^{\infty} t^{-4} e^{-xt} e^{-\frac{1}{t^3}} dt \\ &= 3 \int_1^{\infty} t^{-4} e^{-xt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{-3n} dt \\ &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t^{4+3n}} dt \\ &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} E_{4+3n}(x). \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Observe que

$$\text{Epi}_0(0) = \int_0^1 e^{-u} du = 1 - e^{-1}; \quad (\text{F.5})$$

usando o fato de que

$$E_n(0) = \frac{1}{n-1}, \quad (\text{F.6})$$

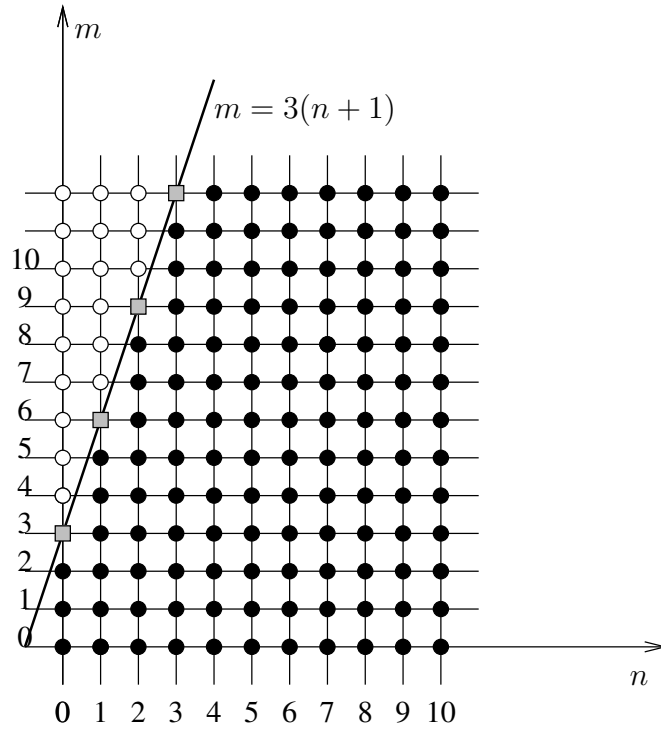


Figura F.1: Ilustração dos pares (n, m) a serem somados para a obtenção de $D_0(x)$.

obtém-se a verificação

$$\begin{aligned}
3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{3+3n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1 \times (-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1 \times (-1)^m}{(m)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-1 \times (-1)^m}{m!} + 1 = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \\
&= 1 - e^{-1}.
\end{aligned} \tag{F.7}$$

Procuramos agora uma expansão em série na forma mais compacta e útil possível para $\text{Epi}_0(x)$. Levando (D.6) em (F.4),

$$\begin{aligned}
\text{Epi}_0(x) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ - \sum_{m=0}^{3n+2} \frac{(-x)^m}{[m-3(n+1)]m!} + \frac{(-x)^{3(n+1)}}{[3(n+1)]!} [-\ln x + \psi(4+3n)] \right. \\
\left. - \sum_{m=4+3n}^{\infty} \frac{(-x)^m}{[m-3(n+1)]m!} \right\} \tag{F.8}
\end{aligned}$$

Para que (F.8) seja útil, é preciso re-arranjar o somatório para colocar os termos do tipo x^m em evidência. Isto é feito trocando-se a ordem da soma, e está ilustrado na figura F.1. Nos 3 termos entre as chaves da equação (F.8), os círculos pretos indicam o primeiro somatório, os quadrados indicam o termo central (contendo $-\ln x$), e os círculos brancos indicam o último somatório. Os quadrados indicam os casos em que $[n+1-m/3] = 0$, e portanto não pode constar do denominador nos somatórios. Ao trocarmos a ordem da soma, e começarmos a somar em m , vemos que isto somente acontecerá quando m for divisível por 3 e maior que zero, ou seja, nos casos em que $m = 3, 6, 9, 12, \dots$

A equação (F.8) pode então ser re-escrita:

$$\text{Epi}_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s_m}{m!} (-x)^m, \quad (\text{F.9})$$

onde os s_m 's representam agora o somatório interno em n .

Para cada um dos valores $m = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots$, n corre de 0 a ∞ sem que $[n + 1 - m/3]$ jamais se anule; em virtude de (D.4), então,

$$m = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots \Rightarrow s_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (1 - m/3)]n!} = \gamma(1 - m/3, 1). \quad (\text{F.10})$$

Já para os valores $m = 3, 6, 9, \dots$, é preciso somar separadamente, em cada horizontal da figura F.1, os pares (m, n) brancos, quadrados e pretos. Isto dá

$$m = 3, 6, 9, \dots \Rightarrow s_m = \sum_{n=0}^{\frac{m}{3}-2} \frac{(-1)^n}{[n + 1 - m/3]n!} + \frac{3(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3 - 1)!} [-\ln x + \psi(m + 1)] + \sum_{n=\frac{m}{3}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + 1 - m/3]n!}. \quad (\text{F.11})$$

O segundo somatório do lado direito é um pouco mais difícil de calcular: lembrando aqui que $m/3 \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{n=m/3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (1 - m/3)]n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m/3}}{[k + 1](k + m/3)!} \\ &= (-1)^{m/3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k + 1](k + m/3)!} \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Usando agora a identidade

$$x = \frac{\Gamma(x + 1)}{\Gamma(x)}, \quad [k + 1] = \frac{\Gamma(k + 2)}{\Gamma(k + 1)} \quad (\text{F.13})$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{n=m/3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (1 - m/3)]n!} &= (-1)^{m/3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + 1)(-1)^k}{\Gamma(k + 2)\Gamma(k + m/3 + 1)} \\ &= \frac{(-1)^{m/3}\Gamma(1)}{\Gamma(2)\Gamma(m/3 + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)} (-1)^k}{\frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma(k+m/3+1)}{\Gamma(m/3+1)} \Gamma(k + 1)} \\ &= \frac{(-1)^{m/3}\Gamma(1)}{\Gamma(2)\Gamma(m/3 + 1)} \times {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1, & 1; & -1 \\ 2, & m/3 + 1 \end{matrix} \right) \\ &= \frac{(-1)^{m/3}}{\Gamma(m/3 + 1)} \times {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1, & 1; & -1 \\ 2, & m/3 + 1 \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Portanto:

$$m = 3, 6, 9, 12, \dots \Rightarrow s_m = \sum_{n=0}^{\frac{m}{3}-2} \frac{(-1)^n}{[n + 1 - m/3]n!} + \frac{3(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3 - 1)!} [-\ln x + \psi(m + 1)] + \frac{(-1)^{m/3}}{\Gamma(m/3 + 1)} \times {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1, & 1; & -1 \\ 2, & m/3 + 1 \end{matrix} \right). \quad (\text{F.15})$$

Uma alternativa talvez mais elegante para calcular s_m quando m for múltiplo de 3 é partir de (F.11) e comparar a soma com

$$-E_{\frac{m}{3}}(1) = \sum_{n=0}^{\frac{m}{3}-2} \frac{(-1)^n}{(n+1-m/3)n!} - \frac{(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3-1)!} \psi(m/3) + \sum_{n=m/3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1-m/3)n!}; \quad (\text{F.16})$$

o resultado é

$$m = 3, 6, 9, 12, \dots \Rightarrow s_m = -E_{\frac{m}{3}}(1) + \frac{(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3-1)!} [-3 \ln x + 3\psi(m+1) + \psi(m/3)]. \quad (\text{F.17})$$

A segunda integral é

$$\begin{aligned} \text{Epi}_1(x) &= \int_1^{\infty} \exp[-u - xu^{-1/3}] du \\ &= \int_1^{\infty} e^{-u} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-xu^{-1/3})^m}{m!} du \\ &= \int_1^{\infty} e^{-u} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m u^{-\frac{m}{3}}}{m!} du \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} \int_1^{\infty} u^{-\frac{m}{3}} e^{-u} du = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} \int_1^{\infty} u^{(1-\frac{m}{3})-1} e^{-u} du = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(1 - m/3, 1) \frac{(-x)^m}{m!}. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Em particular, quando m é divisível por 3, segue-se de (D.7) que

$$\Gamma(1 - m/3, 1) = E_{\frac{m}{3}}(1). \quad (\text{F.19})$$

Então, $\text{Epi}_0(x)$ é dado por (F.9), com (F.10) e (F.17), e $\text{Epi}_1(x)$ é dado por (F.18). A série para $\text{Epi}(x)$ é dada pela soma (F.2), e tem a forma

$$\text{Epi}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} [a_m + b_m \ln x]. \quad (\text{F.20})$$

Quando $m = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots$, $b_m = 0$; a_m é dado pela soma de $\gamma(1 - m/3, 1)$ de (F.10) com $\Gamma(1 - m/3, 1)$ de (F.18):

$$m = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots \Rightarrow a_m = \Gamma(1 - m/3), \quad b_m = 0. \quad (\text{F.21})$$

Quando $m = 3, 6, 9, \dots$, a integral exponencial $E_{\frac{m}{3}}(1)$ é eliminada pela soma de (F.17) com (F.19), donde

$$m = 3, 6, 9, \dots \Rightarrow a_m = \frac{(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3-1)!} [3\psi(m+1) + \psi(m/3)], \quad b_m = -3 \frac{(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3-1)!}. \quad (\text{F.22})$$

A figura F.2 mostra a comparação da série obtida, (F.20), dos seus 3 primeiros termos (até x^2), e do cálculo de $\text{Epi}(x)$ com integração numérica.

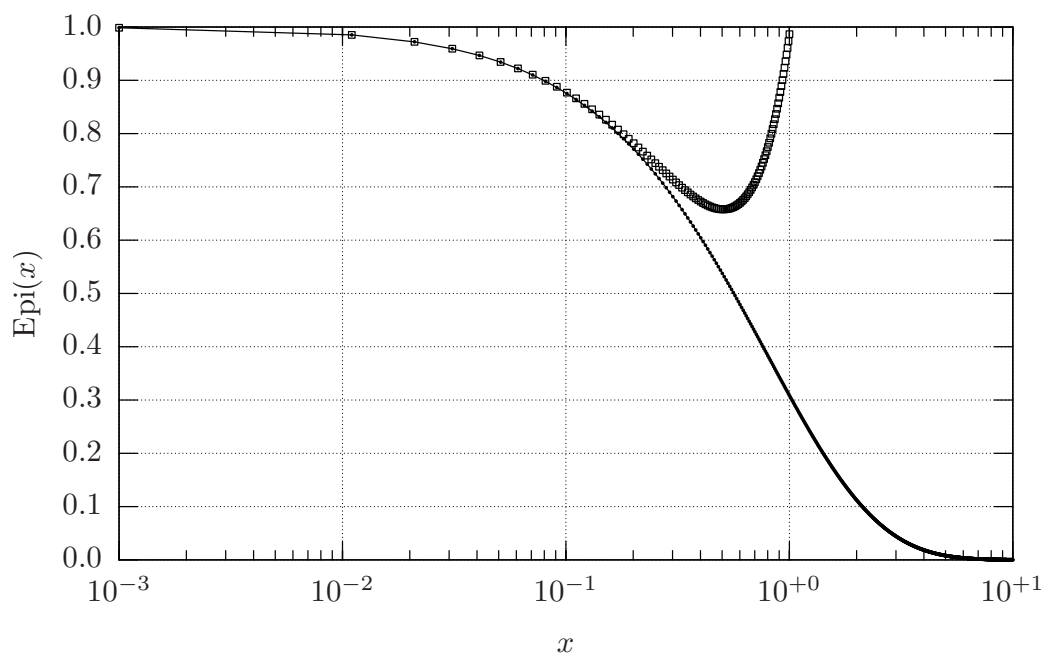


Figura F.2: Cálculo da função $Epi(x)$: série (F.20) (linha contínua), integração numérica (círculos cheios) e 3 primeiros termos de (F.20) (quadrados).

Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M. (1953). Evaluation of the integral $\int_0^\infty e^{-u^2-x/u} du$. *J of Mathematical Physics*, 32:188–192.
- Abramowitz, M. e Stegun, I. A., editores (1972). *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, Inc., New York.
- Batchelor, G. K. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity. *J. Fluid Mech.*, 5:113–133.
- Batchelor, G. K., Howells, I. D., e Townsend, A. A. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 2. The case of large conductivity. *J. Fluid Mech.*, 5:134–139.
- Batchelor, G. K. e Proudman, I. (1954). The effects of rapid distortion of a fluid in turbulent motion. *Q J Mech. Appl Maths*, 7:83–103.
- Chamecki, M. e Dias, N. L. (2004). The local isotropy assumption and the turbulent kinetic energy dissipation rate in the atmospheric surface layer. *Q J Roy Meteorol Soc*, 130(603):2733–2752.
- Claussen, M. (1985). A model of turbulence spectra in the atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 33:151–172.
- Davidson, P. A. (2004). *Turbulence. An introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, Oxford. 657 pp.
- Deissler, R. G. (1961). Effects of inhomogeneity and of shear flow in weak turbulent fields. *The Physics of Fluids*, 4(10):1187–1198.
- Deissler, R. G. (1962). Turbulence in the presence of a vertical body force and temperature gradient. *J of Geophys Res*, 67(8):3049–3062.
- Deissler, R. G. (1998). *Turbulent Fluid Motion*. Taylor & Francis, Philadelphia, PA, USA.
- Dias, N. L. e Brutsaert, W. (1998). Radiative effects on temperature in the stable surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 89(1):141–159.
- Fernando, H. J. S. e Hunt, J. C. R. (1997). Turbulence, waves and mixing at shear-free density interfaces. 1: A theoretical model. *J. Fluid Mech.*, 347:197–234.
- Fochesatto, G. J., Drobinski, P., Flamant, C., Guedalia, D., Sarrat, C., Flamant, P. H., e Pelon, J. (2001). Evidence of dynamical coupling between the residual layer and the developing convective boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 99:451–464.

- Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M. (1980). *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, San Diego.
- Hanazaki, H. e Hunt, J. C. R. (1996). Linear processes in unsteady stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 318:303–337.
- Harris, S. (1999). *An introduction to the theory of the Boltzmann equation*. Dover, Mineola, New York.
- Hill, R. J. (1978). Models of the scalar spectrum for turbulent advection. *J. Fluid Mech.*, 88:541–562.
- Hill, R. J. (1991). Comparison of experiment with a new theory of the turbulence temperature structure function. *Physics of Fluids A*, 3(6):1572–1576.
- Hill, R. J. (1997). Algorithms for obtaining atmospheric surface-layer fluxes from scintillation measurements. *J of Atmospheric and Oceanic Technology*, 14:456–467.
- Hunt, J. C. R. e Carruthers, D. J. (1990). Rapid distortion theory and the ‘problems’ of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 212:497–537.
- Kang, H. S., Chester, S., e Meneveau, C. (2003). Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation. *J. Fluid Mech.*, 480:129–160.
- Kolmogorov, A. N. (1991). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Em Hunt, J. C. R., Phillips, O. M., e Williams, D., editores, *Turbulence and stochastic processes: Kolmogorov’s ideas 50 years on*, volume 434 de *Proceedings A*, páginas 9–13. The Royal Society.
- Kraichnan, R. H. (1974). On Kolmogorov’s inertial-range theories. *J. Fluid Mech.*, 62(02):305.
- Lamorgese, A. G., Caughey, D. A., e Pope, S. B. (2005). Direct numerical simulation of homogeneous turbulence with hyperviscosity. *Physics of Fluids*, 17:015106.
- Lebedev, N. N. (1972). *Special functions and their applications*. Dover Publications, Inc., New York.
- Leclerc, M., Karipot, A., Prabha, T., Allwine, G., Lamb, B., e Gholz, H. (2003a). Impact of non-local advection on flux footprints over a tall forest canopy: a tracer flux experiment. *Agric For Meteorol*, 115:17–34.
- Leclerc, M. Y., Meskhidze, N., e Finn, D. (2003b). Comparison between measured tracer fluxes and footprint model predictions over a homogeneous canopy of intermediate roughness. *Agric For Meteorol*, 117:145–158.
- Lin, J. T. (1972). Velocity spectrum of locally isotropic turbulence in the inertial and dissipation ranges. *Physics of Fluids*, 15:205–207.
- McComb, W. D. (1992). *The physics of fluid turbulence*. Oxford University Press, New York.
- Moraes, O. L. L. e Epstein, M. (1987). The velocity spectra in the stable surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 40:407–414.
- Moraes, O. L. L. e Goedert, J. (1988). Kaimal’s isopleths from a closure Model. *Boundary-Layer Meteorol.*, 45:83–92.

- Pao, Y. H. (1965). Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers. *The Physics of Fluids*, 8:1063–1075.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Saddoughi, S. G. (1997). Local isotropy in complex turbulent boundary layers at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 348:201–245.
- Saddoughi, S. G. e Veeravallis, S. V. (1994). Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 268:333–372.
- Seinfeld, J. H. e Pandis, S. N. (1998). *Atmospheric chemistry and physics*. John Wiley & Sons, New York.
- Shen, X. e Warhaft, Z. (2000). The anisotropy of the small scale structure in high Reynolds number ($R_\lambda \approx 1000$) turbulent shear flow. *Physics of Fluids*, 12:2976–2989.
- Taylor, G. I. (1921). Diffusion by continuous movements. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 20(2):196–211.
- Taylor, G. I. (1935). Statistical theory of turbulence. I. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:421–444.
- Taylor, G. I. (1938). The spectrum of turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 164:476–490.
- Warhaft, Z. (2000). Passive scalars in turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32:203–240.
- Watson, T. B., Johnson, R., Pitchford, M. L., Green, M., Kuhns, H., e Etyemezian, V. (2000). The Perfluorocarbon Tracer Releases During the Big Bend Regional Aerosol and Visibility Observational (BRAVO) Study. NOAA Technical Memorandum OAR Arl-237, NOAA, Idaho Falls.