

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underline{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underline{\underline{A}}$.

1 [20] Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, resolva

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} + y &= x, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1.\end{aligned}$$

Observações:

- Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

- Atenção: neste problema a variável independente é x .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2} + y\right\} &= \mathcal{L}\{x\}, \\ s^2\bar{y}(s) - sy(0) - y'(0) + \bar{y} &= \frac{1}{s^2}, \\ (s^2 + 1)\bar{y}(s) - 1 &= \frac{1}{s^2}, \\ (s^2 + 1)\bar{y}(s) &= 1 + \frac{1}{s^2} = \frac{s^2 + 1}{s^2}, \\ \bar{y}(s) &= \frac{(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)s^2} = \frac{1}{s^2}; \\ y(x) &= x \blacksquare\end{aligned}$$

2 [20] Utilizando **obrigatoriamente** o teorema da convolução, calcule

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-1)} \right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Por inspeção, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} &= t, \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} &= e^t.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-1)} \right\} = t * e^t = e^t * t.$$

Vamos escolher a forma mais simples:

$$\begin{aligned}t * e^t &= \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau, \\ e^t * t &= \int_0^t e^{\tau} (t-\tau) d\tau.\end{aligned}$$

A complexidade é similar; ficamos com a primeira e integramos:

$$\begin{aligned}\int_0^t \tau e^{a\tau} d\tau &= \frac{1}{a} \left[\int_0^t \underbrace{\tau}_u \underbrace{e^{a\tau}}_{dv} d(a\tau) \right] \\ &= \frac{1}{a} \left\{ \tau e^{a\tau} \Big|_0^t - \frac{1}{a} \left[\int_0^t e^{a\tau} d(a\tau) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{a} \left\{ t e^{at} - \frac{1}{a} [e^{at} - 1] \right\} \\ &= \frac{1}{a^2} \{ a t e^{at} - [e^{at} - 1] \}.\end{aligned}$$

Portanto, com $a = -1$,

$$\begin{aligned}\int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau &= e^t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau \\ &= e^t [-t e^{-t} - e^{-t} + 1] \\ &= [-t - 1 + e^t] \\ &= e^t - t - 1 \blacksquare\end{aligned}$$

3 [20] Calcule

$$\int_{-\infty}^2 \delta(t - 3) dt,$$

onde δ é a delta de Dirac. **A SUA RESPOSTA DEVE SER UM NÚMERO REAL.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A $\delta(t - 3)$ é “igual a zero” em todos os pontos abaixo de 3; portanto,

$$\int_{-\infty}^2 \delta(t - 3) dt = 0 \blacksquare$$

4 [20] Verifique se

$$\langle u, v \rangle \equiv \sum_{i=1}^3 i u_i^* v_i = 1 u_1^* v_1 + 2 u_2^* v_2 + 3 u_3^* v_3$$

é um produto interno legítimo em $\mathbb{V} = \{(z_1, z_2, z_3), z_i \in \mathbb{C}\}$. **ATENÇÃO: VOLTE E LEIA CUIDADOSAMENTE A DEFINIÇÃO DE $\langle u, v \rangle$ ACIMA.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= \sum_{i=1}^3 i u_i^* v_i \\&= \sum_{i=1}^3 (i u_i v_i^*)^* \\&= \sum_{i=1}^3 i v_i^* u_i \\&= \langle v, u \rangle^* \quad \checkmark \\ \langle u, v + w \rangle &= \sum_{i=1}^3 i u_i^* (v_i + w_i) \\&= \sum_{i=1}^3 [i u_i^* v_i + i u_i^* w_i] \\&= \sum_{i=1}^3 i u_i^* v_i + \sum_{i=1}^3 i u_i^* w_i \\&= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \checkmark \\ \langle u, \alpha v \rangle &= \sum_{i=1}^3 i u_i^* \alpha v_i \\&= \alpha \sum_{i=1}^3 i u_i^* v_i \\&= \alpha \langle u, v \rangle \quad \checkmark \\ \langle u, u \rangle &= \sum_{i=1}^3 i u_i^* u_i \\&= \sum_{i=1}^3 i |u_i|^2 \\&\begin{cases} > 0, & \exists i \mid u_i \neq 0, & \checkmark \\ = 0, & \forall i \in 1, 2, 3 \Rightarrow u_i = 0. & \checkmark \end{cases}\end{aligned}$$

Portanto, a operação $\langle u, v \rangle$ definida acima é um produto interno legítimo ■

5 [20] Se

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq +1, \end{cases}$$

- a) [10] Obtenha a série de Fourier **complexa** de $f(x)$ no intervalo $[-1, 1]$.
b) [10] **Simplifique** para uma série puramente real.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} a &= -1, \\ b &= +1, \\ L &= 2. \end{aligned}$$

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 1 \, dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Se $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{2\pi i n x}{2}} f(x) \, dx \\ c_n &= \frac{1}{2} \int_0^{+1} e^{-\pi i n x} \, dx \\ c_n &= \frac{1}{2(-\pi i n)} \int_0^{+1} e^{-\pi i n x} (-\pi i n) \, dx \\ c_n &= \frac{i}{2\pi n} [e^{-\pi i n x}]_0^1 \\ &= \frac{i}{2\pi n} [e^{-\pi i n} - 1] \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ par}, \\ \frac{-i}{\pi n} & n \text{ ímpar}; \end{cases} \\ f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{\pi(2n+1)} [e^{\pi i(2n+1)x} - e^{-\pi i(2n+1)x}] \\ &= \frac{1}{2} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2n+1)} 2i \operatorname{sen}(\pi(2n+1)x); \\ f(x) &= \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2n+1)} \operatorname{sen}(\pi(2n+1)x) \blacksquare \end{aligned}$$