TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 24 jun 2026
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

1 [20] Obtenha $\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}]$ em função de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Podemos trabalhar na base canônica.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} &= \boldsymbol{e}_m\frac{\partial}{\partial x_m},\\
\boldsymbol{u} &= u_i\boldsymbol{e}_i,\\
\boldsymbol{v} &= v_j\boldsymbol{e}_j,\\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u} &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k\\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v} &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k.
\end{aligned}
$$

Agora operamos com a expressão inicial:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}] &= \boldsymbol{e}_m\frac{\partial}{\partial x_m}\cdot[\epsilon_{ijk}u_iv_j\boldsymbol{e}_k]\\
&= \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_m}[u_iv_j]\,(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_k)\\
&= \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_m}[u_iv_j]\delta_{mk}\\
&= \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}[u_iv_j]\\
&= v_j\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+u_i\epsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\\
&= v_j\,\underbrace{\epsilon_{kij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}]_j}+u_i\,\underbrace{\epsilon_{jki}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}}_{-[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}]_i}\\
&= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Resolva a EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \operatorname{tg}(x)y = 1.$$

Observação:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x &= \ln(\sec(x)) + C;\\ \int \sec(x)\,\mathrm{d}x &= \ln(\operatorname{tg}(x) + \sec(x)) + C;\\ \sec(x) &= \frac{1}{\cos(x)}.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \operatorname{tg}(x)uv &= 1,\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \operatorname{tg}(x)v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1;\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \operatorname{tg}(x)v &= 0;\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\operatorname{tg}(x)v;\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x\\
\int_{v_0}^{v(x)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\int_{\xi=0}^{x} \operatorname{tg}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\\
\ln\left(\frac{v(x)}{v_0}\right) &= -\left[\ln(\sec(x)) - \ln(\sec(0))\right]\\
&= -\ln(\sec(x));\\
\ln\left(\frac{v(x)}{v_0}\right) + \ln(\sec(x)) &= 0;\\
\ln\left(\frac{v(x)}{v_0}\sec(x)\right) &= 0,\\
\frac{v(x)}{v_0}\sec(x) &= 1,\\
v(x) &= v_0\cos(x).
\end{aligned}$$

Resta agora

$$\begin{aligned}
v_0\cos(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{v_0}\sec(x),\\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{v_0}\,\mathrm{d}x,\\
\int_{u_0}^{u(x)} \mathrm{d}u &= \frac{1}{v_0}\int_{\xi=0}^{x} \sec(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\\
u(x) - u_0 &= \frac{1}{v_0}\left\{\left[\ln(\operatorname{tg}(x) + \sec(x))\right] - \left[\ln(\operatorname{tg}(0) + \sec(0))\right]\right\}\\
u(x) &= u_0 + \frac{1}{v_0}\left[\ln(\operatorname{tg}(x) + \sec(x))\right].
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Agora,

$$
\begin{aligned}
y &= uv \\
&= \left\{u_0 + \frac{1}{v_0}\left[\ln(\operatorname{tg}(x) + \sec(x))\right]\right\} v_0 \cos(x) \\
&= u_0 v_0 \cos(x) + \left[\ln(\operatorname{tg}(x) + \sec(x))\right] \cos(x) \\
&= C \cos(x) + \left[\ln(\operatorname{tg}(x) + \sec(x))\right] \cos(x) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Resolva (utilizando obrigatoriamente o método de variação de constantes para a segunda solução)

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} r^2 - 2r + 1 &= 0, \\ (r-1)^2 &= 0, \\ r &= 1. \end{aligned}$$

A raiz é dupla, e a primeira solução é

$$y_1(x) = c_1 e^x.$$

A 2ª solução deve ser buscada com o método de variação de constantes:

$$\begin{aligned} y_2 &= u y_1, \\ y_2' &= u' y_1 + u y_1', \\ y_2'' &= u'' y_1 + u' y_1' + u' y_1' + u y_1''. \end{aligned}$$

Substituímos de volta:

$$\begin{aligned} u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'' - 2(u' y_1 + u y_1') + u y_1 &= 0, \\ u \underbrace{(y_1'' - 2y_1' + y_1)}_{\equiv 0} + u'' y_1 + 2u' y_1' - 2u' y_1 &= 0, \\ u'' y_1 + 2u' y_1' - 2u' y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Mas $y_1' = y_1 = e^x$; então,

$$\begin{aligned} e^x \left[u'' + 2u' - 2u' \right] &= 0, \\ u'' &= 0, \\ u' &= c_2, \\ u &= c_2 x, \end{aligned}$$

e a solução geral é

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Encontre a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

em torno de $z = 0$ no anel $1 < |z| < 2$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2},\\
\frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{(z-1)(z-2)},\\
(A+B)z - 2A - B &= 1,\\
A + B &= 0,\\
-2A - B &= 1,\\
-A &= 1,\\
A &= -1,\\
B &= 1,\\
f(z) &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}\\
&= \frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)}\\
&= \frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{-1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}\\
&= -\frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^4 + \dots\right]\\
&\quad - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \dots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Em sala de aula, nós estudamos a solução em série de potências de

$$x^2y'' + (x + x^2)y' - y = 0,$$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

a) [10] Mostre que partindo da menor raiz não é possível obter a_2.

b) [10] Mostre que

$$y_2 = x^{r_2}\left[a_0 + a_1 x\right]$$

(onde r_2 é a menor raiz) resolve a EDO (para a menor raiz, faça $a_0 = 1$ e obtenha a_1).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Tente:

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1},\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2},
\end{aligned}$$

e substitua na EDO, obtendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)\right] a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Evidentemente devemos fazer

$$\begin{aligned}
m + r &= n + r + 1,\\
m &= n + 1,\\
n &= m - 1;
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(m-1+r)\right] a_{m-1} x^{m-1+r+1} = 0.$$

Segue-se que

$$[r^2 - 1]a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)^2 - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n-1+r)\right] a_{n-1} x^{n+r} = 0,$$

$$[r^2 - 1]a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[(n+r)^2 - 1\right] a_n + \left[(n-1+r)\right] a_{n-1}\right\} x^{n+r} = 0.$$

A equação indicial é

$$r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$$

As raízes diferem por um inteiro; a menor raiz pode levar às duas soluções, ou a nenhuma delas. Tentemos:

$$\begin{aligned}
[(n-1)^2 - 1]a_n + [n-2]a_{n-1} &= 0,\\
[n^2 - 2n + 1 - 1]a_n + [n-2]a_{n-1} &= 0,\\
n(n-2)a_n + (n-2)a_{n-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Claramente, a expressão acima não permite a obtenção de a_2 a partir de a_1. Para os dois primeiros termos,

$$\begin{aligned}
na_n + a_{n-1} &= 0,\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Para $a_0 = 1$, esta primeira solução é:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= -1,
\end{aligned}
$$

e a partir daqui a_2 é arbitrário. Façamos portanto $a_2 = 0$; obtemos:

$$
\begin{aligned}
y &= x^{-1}\left[1 - x\right], \\
y' &= -\frac{1}{x^2}, \\
y'' &= \frac{2}{x^3}
\end{aligned}
$$

Substituindo na EDO,

$$
x^2\frac{2}{x^3} + (x + x^2)\left[-\frac{1}{x^2}\right] - \frac{1-x}{x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x} + 1 \equiv 0 \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$