

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO \vec{v} ; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underline{\underline{A}}$.

1 [20] Obtenha todos os **autovalores** da matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (3-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda) - 4] - 4[4(1-\lambda) - 4] + 2[8 - 2(3-\lambda)] &= 0 \\ (3-\lambda)[3-\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 4] - 4[4 - 4\lambda - 4] + 2[8 - 6 + 2\lambda] &= 0 \\ (3-\lambda)[3 - 4\lambda + \lambda^2 - 4] - 4[-4\lambda] + 2[2 + 2\lambda] &= 0 \\ (3-\lambda)[-1 - 4\lambda + \lambda^2] + 16\lambda + 4[1 + \lambda] &= 0 \\ -3 - 12\lambda + 3\lambda^2 + \lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 16\lambda + 4 + 4\lambda &= 0 \\ -1 + (-12 + 1 + 16 + 4)\lambda + (3 + 4)\lambda^2 - \lambda^3 &= 0 \\ 1 + 9\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3 &= 0 \end{aligned}$$

É muito fácil verificar que $\lambda = -1$ é raiz. Prosseguindo,

$-\lambda^3$	$+7\lambda^2$	$+9\lambda$	$+1$	λ	$+1$	
$-\lambda^3$	$-\lambda^2$			$-\lambda^2$	$+8\lambda$	$+1$
	$8\lambda^2$	$+9\lambda$	$+1$			
	$8\lambda^2$	$+8\lambda$				
	λ		$+1$			
	λ		$+1$			
	0					

Os dois outros autovalores, portanto, são as raízes de $-\lambda^2 + 8\lambda + 1 = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4}}{-2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{4 \times 17}}{-2} \\ &= 4 \pm \sqrt{17} \blacksquare \end{aligned}$$

2 [20] Resolva o sistema de equações diferenciais acopladas

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= 2u + 3v, \\ \frac{dv}{dt} &= u + 2v.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Em forma matricial,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (u, v), \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Obtenha os autovalores e autovetores:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ (2 - \lambda)^2 - 3 &= 0, \\ 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 3 &= 0, \\ \lambda^2 - 4\lambda + 1 &= 0, \\ \lambda &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 1}}{2}, \\ \lambda &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}, \\ &= 2 \pm \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Busque os autovetores:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_1 &= \lambda \mathbf{f}_1; \\ \mathbf{f}_1 &= (x_1, x_2); \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= (2 + \sqrt{3})x_1, \\ x_1 + 2x_2 &= (2 + \sqrt{3})x_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\sqrt{3}x_1 + 3x_2 &= 0, \\ x_1 - \sqrt{3}x_2 &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt{3}x_2, \\ x_1 &= \sqrt{3}x_2.\end{aligned}$$

Fazendo $x_2 = 1$, o primeiro autovetor é

$$\mathbf{f}_1 = (\sqrt{3}, 1).$$

Prosseguindo para o segundo autovetor,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_2 &= \lambda \mathbf{f}_2; \\ \mathbf{f}_2 &= (x_1, x_2); \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

Continue a solução no verso \implies

ou

$$2x_1 + 3x_2 = (2 - \sqrt{3})x_1,$$

$$x_1 + 2x_2 = (2 - \sqrt{3})x_2,$$

$$\sqrt{3}x_1 + 3x_2 = 0,$$

$$x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0,$$

$$x_1 = -\sqrt{3}x_2,$$

$$x_1 = -\sqrt{3}x_2.$$

Fazendo $x_2 = 1$, o segundo autovetor é

$$f_2 = (-\sqrt{3}, 1).$$

Portanto, na base F dos autovetores o sistema é escrito como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_F \\ v_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_F \\ v_F \end{bmatrix},$$

$$u_F = C_1 e^{(2+\sqrt{3})t},$$

$$v_F = C_2 e^{(2-\sqrt{3})t};$$

$$\mathbf{u} = u_F \mathbf{f}_1 + v_F \mathbf{f}_2,$$

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{(2+\sqrt{3})t} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{(2-\sqrt{3})t} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [20] Expanda

$$f(x, y) = e^{x+2y}$$

em uma série de Taylor **bivariada** em torno de $(x_0, y_0) = (0, 0)$ até a ordem 2 inclusive.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2}x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2}y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}yx + \dots;$$

$$f(0, 0) = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+2y},$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x+2y},$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{x+2y},$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{x+2y},$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} = 4;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2e^{x+2y};$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = 2.$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \times 4y^2 + \frac{1}{2} \times 2xy + \frac{1}{2} \times 2yx + \dots \\ &= 1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + 2xy + \dots \blacksquare \end{aligned}$$

4 [20] Considere a transformação de variáveis de coordenadas cilíndricas (r, θ, h) para coordenadas cartesianas (x, y, z) :

$$x = r \cos(\theta),$$

$$y = r \sin(\theta),$$

$$z = h.$$

Calcule o jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(r, \theta, h)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, h)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso \implies

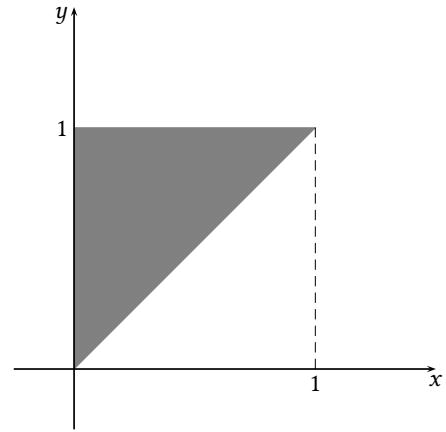
5 [20] Calcule

$$I = \iint_{R_{xy}} f(x, y) \, dy \, dx$$

Para

$$f(x, y) = xy,$$

onde R_{xy} é a região em cinza na figura ao lado.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 xy \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 x \int_{y=x}^1 y \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_x^1 \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 x \frac{1}{2} [1 - x^2] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 [x - x^3] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] \\ &= \frac{1}{8} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso \Rightarrow