TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 01 abr 2026
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Próximo da costa, uma onda de gravidade com comprimento L se propaga em uma região com profundidade d, a uma velocidade (celeridade da onda) c. Além dessas variáveis, apenas a aceleração da gravidade g é importante no fenômeno. **Utilizando obrigatoriamente L e c como variáveis comuns**, encontre todos os parâmetros adimensionais que governam esse problema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

As variáveis e suas dimensões são

L	L
d	L
c	$\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1}$
g	$\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2}$

Há 4 variáveis e 2 dimensões fundamentais; deve haver 2 grupos adimensionais. Escolhemos L e c para participarem de todos eles. Então:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= dL^a c^b,\\ 1 &= (\mathsf{L})\mathsf{L}^a(\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1})^b,\\ \mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 &= \mathsf{L}^{1+a+b}\,\mathsf{T}^{-b},\end{aligned}$$

donde $a = -1$, $b = 0$.

$$\Pi_1 = d/L.$$

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= gL^a c^b,\\ 1 &= (\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2})\mathsf{L}^a(\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1})^b,\\ \mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 &= \mathsf{L}^{1+a+b}\,\mathsf{T}^{-2-b},\end{aligned}$$

donde $b = -2$, $a = 1$.

$$\Pi_2 = \frac{gL}{c^2}.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [20] Obtenha:

a) [10] A projeção do vetor $\boldsymbol{a} = (5,4,5)$ na direção do vetor $\boldsymbol{b} = (1,2,1)$;

b) [10] A projeção do vetor $\boldsymbol{u} = (2,3,4,5)$ na direção do vetor $\boldsymbol{v} = (1,2,2,1)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}(1,2,1)\\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1);\\
\text{proj}\,\boldsymbol{a}\,\text{sobre}\,\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m}\\
&= (5,4,5)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(5\times 1+4\times 2+5\times 1\right) = \frac{18}{\sqrt{6}} \blacksquare
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2+1^2}}(1,2,2,1)\\
&= \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1);\\
\text{proj}\,\boldsymbol{u}\,\text{sobre}\,\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{m}\\
&= (2,3,4,5)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1)\\
&= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(2\times 1+3\times 2+4\times 2+5\times 1\right) = \frac{21}{\sqrt{10}} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Se

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \epsilon_{ijm} u_i v_j \boldsymbol{e}_m, \\
\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{kln} a_k b_l \boldsymbol{e}_n,
\end{aligned}
$$

onde $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$, obtenha, **usando obrigatoriamente notação indicial**, o produto escalar $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{c}$ em termos de produtos escalares entre $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{c} &= \epsilon_{ijm} u_i v_j \boldsymbol{e}_m \cdot \epsilon_{kln} a_k b_l \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{ijm} \epsilon_{kln} u_i v_j a_k b_l \underbrace{(\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n)}_{\delta_{mn}} \\
&= \epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} u_i v_j a_k b_l \\
&= (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) u_i v_j a_k b_l \\
&= \delta_{ik}\delta_{jl} u_i v_j a_k b_l - \delta_{il}\delta_{jk} u_i v_j a_k b_l \\
&= u_i a_i v_j b_j - u_i b_i v_j a_j \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Se $z = x + \mathrm{i}y$, mostre que $z^{-1} = z^*/|z|^2$, onde $z^* = x - \mathrm{i}y$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
z^{-1} &= \frac{1}{x+\mathrm{i}y} \\
&= \frac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)} \\
&= \frac{z^*}{x^2-\mathrm{i}^2y^2} \\
&= \frac{z^*}{x^2+y^2} \\
&= \frac{z^*}{|z|^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 Numa base ortonormal, a *contração* de dois tensores de ordem 2 $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ é definida por

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j : B_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \equiv A_{ij}B_{lm}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m).$$

a) [10] Prossiga, **utilizando obrigatoriamente notação indicial**, calculando os produtos escalares, e simplificando ao máximo a expressão acima.

b) [10] Exprima o resultado como uma operação envolvendo as matrizes de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ na base ortonormal. **Note que neste curso a matriz da transformação linear $\boldsymbol{A}$ é escrita como $[\boldsymbol{A}]$.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned} A_{ij}B_{lm}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m) &= A_{ij}B_{lm}\delta_{jl}\delta_{im} \\ &= A_{ij}B_{ji}. \end{aligned}$$

b)

$$A_{ij}B_{ji} = A_{ij}B^\top_{ij} = [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}]^\top \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹