

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\vec{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\approx$.

1 [20] A vazão volumétrica ($L^3 T^{-1}$) em um vertedor depende sua largura ℓ , da carga hidráulica H (o desnível entre o nível d'água a montante e a crista) e da aceleração da gravidade g . A dependência tem a forma

$$Q = C \ell g^\alpha H^\beta,$$

onde C é uma constante **adimensional**. Utilizando análise dimensional, obtenha α e β .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se C é adimensional, então

$$\begin{aligned} \llbracket C \rrbracket &= \left\llbracket \frac{Q}{\ell g^\alpha H^\beta} \right\rrbracket, \\ 1 &= L^3 T^{-1} L^{-1} [L T^{-2}]^{-\alpha} [L]^{-\beta}, \\ L^0 T^0 &= L^{3-1-\alpha-\beta} T^{-1+2\alpha}, \\ \alpha &= 1/2, \\ 3 - 1 - 1/2 - \beta &= 0, \\ \beta &= 3/2 \blacksquare \end{aligned}$$

2 [20] Seja $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base **NÃO ORTOGONAL** do $\mathbb{R}^3$, com

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv G_{ij}.$$

Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores do $\mathbb{R}^3$; na base E temos (em notação indicial)

$$\mathbf{u} = u_{Ei} \mathbf{e}_i,$$

$$\mathbf{v} = v_{Ej} \mathbf{e}_j.$$

Escreva o produto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ na base E , usando notação indicial.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_{Ei} \mathbf{e}_i \cdot v_{Ej} \mathbf{e}_j \\ &= u_{Ei} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) v_{Ej} \\ &= u_{Ei} G_{ij} v_{Ej} \blacksquare \end{aligned}$$

3 [20] Resolva a EDO

$$\frac{dy}{dx} + \cos(x)y = 1.$$

Observação: Não é possível calcular

$$\int e^{\sin(x)} dx$$

em forma fechada. Portanto, quando for necessário, use simplesmente

$$E_s(x) \equiv \int_0^x e^{\sin(\xi)} d\xi,$$

e escreva seus resultados em termos de $E_s(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$y = uv,$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \cos(x)uv = 1,$$

$$u \left[\frac{dv}{dx} + \cos(x)v \right] + v \frac{du}{dx} = 1;$$

$$\frac{dv}{dx} + \cos(x)v = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -\cos(x)v;$$

$$\frac{dv}{v} = -\cos(x) dx$$

$$\int_{v_0}^{v(x)} \frac{dv}{v} = - \int_{\xi=0}^x \cos(\xi) d\xi,$$

$$\ln \left(\frac{v(x)}{v_0} \right) = - [\sin(x) - \sin(0)]$$
$$= -\sin(x);$$

$$\frac{v(x)}{v_0} = \exp[-\sin(x)];$$

$$v(x) = v_0 \exp[-\sin(x)].$$

Resta agora

$$v_0 e^{-\sin(x)} \frac{du}{dx} = 1,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{v_0} e^{\sin(x)},$$

$$du = \frac{1}{v_0} e^{\sin(x)} dx,$$

$$\int_{u_0}^{u(x)} du = \frac{1}{v_0} \int_{\xi=0}^x e^{\sin(\xi)} d\xi,$$

$$u(x) - u_0 = \frac{1}{v_0} E_s(x),$$

$$u(x) = u_0 + \frac{1}{v_0} E_s(x).$$

Agora,

$$y = uv$$

$$= \left\{ u_0 + \frac{1}{v_0} E_s(x) \right\} v_0 \exp[-\sin(x)]$$

$$= u_0 v_0 \exp[-\sin(x)] + E_s(x) \exp[-\sin(x)]$$

$$= C \exp[-\sin(x)] + E_s(x) \exp[-\sin(x)] \blacksquare$$

4 [20] Dada a equação diferencial ordinária

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

a) [10] Encontre a solução mais simples.

b) [10] **UTILIZANDO OBRIGATORIAMENTE O MÉTODO DE VARIAÇÃO DE CONSTANTES**, encontre uma segunda solução LI.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2;$$

$$y_1 = e^{2x}.$$

b)

$$y = ue^{2x},$$

$$y' = u'e^{2x} + 2ue^{2x} = e^{2x}[u' + 2u],$$

$$y'' = e^{2x}[u'' + 2u'] + 2e^{2x}[u' + 2u]$$

$$= e^{2x}[u'' + 4u' + 4u],$$

$$e^{2x}[u'' + 4u' + 4u] - 4e^{2x}[u' + 2u] + e^{2x}4u = 0,$$

$$u'' + 4u' + 4u - 4u' - 8u + 4u = 0,$$

$$u'' = 0,$$

$$u = ax + b;$$

$$y = (ax + b)e^{2x},$$

$$y_2 = xe^{2x} \blacksquare$$

5 [20] Dadas as condições de Cauchy-Riemman para a função complexa $f(z) = u + iv$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

em que pontos do plano complexo a função

$$f(z) = z + z^*$$

NÃO é analítica?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça

$$f(z) = (x + iy) + (x - iy)$$
$$= \underbrace{2x}_{u(x,y)} + \underbrace{0}_{v(x,y)} i,$$

$$u(x, y) = 2x,$$

$$v(x, y) = 0.$$

As condições de Cauchy-Riemman são

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Substituindo os valores das derivadas parciais de $u(x, y)$ e $v(x, y)$,

$$2 = 0,$$

$$0 = -0,$$

não valem simultaneamente em nenhum ponto do plano complexo, e $f(z)$ **não** é analítica em **todos** os pontos de $\mathbb{C}$ ■