TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
S, 15 Dez 2025
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Calcule, por integração a partir da definição,

$$\mathscr{L}\left\{t\mathrm{e}^{-t}\right\},$$

onde $\mathscr{L}\{\cdot\}$ é a transformada de Laplace.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{t\mathrm{e}^{-t}\right\} &= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{t=0}^{\infty} t\mathrm{e}^{-(1+s)t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{(s+1)^2}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Em detalhe,

$$\mathscr{L}\left\{t\mathrm{e}^{-t}\right\} = \frac{1}{-(1+s)}\int_{t=0}^{\infty} \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-(1+s)t}\left[-(1+s)\right]\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}v}$$

Então

$$\begin{aligned} u &= t, & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}v &= \mathrm{e}^{-(1+s)t}\left[-(1+s)\right]\mathrm{d}t & v &= \mathrm{e}^{-(1+s)t}.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{t\mathrm{e}^{-t}\right\} &= \frac{1}{-(1+s)}\left[uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty v\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{1}{-(1+s)}\left[\cancelto{0}{\lim_{t\to\infty}\left(t\mathrm{e}^{-(1+s)t}\right)} - \cancelto{0}{\lim_{t\to 0}\left(t\mathrm{e}^{-(1+s)t}\right)} - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1+s)t}\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \frac{1}{1+s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1+s)t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{-1}{(1+s)^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(1+s)t}\left[-(1+s)\right]\mathrm{d}t\\ &= \frac{-1}{(1+s)^2}\left[\cancelto{0}{\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(1+s)t}} - \cancelto{1}{\lim_{t\to 0}\mathrm{e}^{-(1+s)t}}\right]\\ &= \frac{1}{(1+s)^2}\ \blacksquare\end{aligned}$$

2 [20] Utilizando **obrigatoriamente** o Teorema da Convolução, encontre a transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Pelo teorema da convolução,

$$\mathscr{L}[f*g] = \overline{f}(s)\overline{g}(s) \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{f}(s)\overline{g}(s)\right\} = \int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Mas

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f(t) = 1, \quad \overline{g}(s) = \frac{1}{s^2+4} \Rightarrow g(t) = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2},$$

donde

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_{\tau=0}^{t} \frac{\operatorname{sen}(2(t-\tau))}{2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1-\cos(2t)}{4} \blacksquare$$

3 [20] Verifique se as funções $\operatorname{sen}(x)$ e $\operatorname{sen}(2x)$ são ortogonais no intervalo $[0, 2\pi]$ debaixo do produto interno canônico para funções reais $f(x)$ e $g(x)$:

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observação: você pode usar

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{(b+a)\operatorname{sen}(2\pi(b-a)) - (b-a)\operatorname{sen}(2\pi(b+a))}{2b^2 - 2a^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $b = 2$, $a = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(2+1)\operatorname{sen}(2\pi(2-1)) - (2-1)\operatorname{sen}(2\pi(2+1))}{2\times 4 - 2\times 1}\\ &= \frac{3\cancelto{0}{\operatorname{sen}(2\pi)} - \cancelto{0}{\operatorname{sen}(6\pi)}}{6} = 0;\end{aligned}$$

portanto, $\operatorname{sen}(x)$ e $\operatorname{sen}(2x)$ são ortogonais ■

4 [20] Obtenha os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y &= 0, \qquad 0 \le x \le \pi,\\
\frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}x} &= 0,\\
y(\pi) &= 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Faça $\lambda = -k^2 < 0$ com $k > 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - k^2 &= 0,\\
r^2 - k^2 &= 0,\\
r^2 &= k^2,\\
r &= \pm k,\\
y(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx),\\
y'(x) &= k\left[A\,\mathrm{senh}(x) + B\cosh(x)\right],\\
y'(0) &= kB = 0 \Rightarrow B = 0,\\
y(\pi) &= A\cos(k\pi) = 0 \Rightarrow A = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda < 0$ não pode ser autovalor.
b) Faça $\lambda = 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= A,\\
y(x) &= Ax + B,\\
y'(0) = A &= 0,\\
y(\pi) &= B = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor.
c) Faça $\lambda = k^2$ com $k > 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 &= 0,\\
r^2 + k^2 &= 0,\\
r^2 &= -k^2,\\
r &= \pm \mathrm{i}k,\\
y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
y'(x) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(x) + B\cos(x)\right],\\
y'(0) &= kB = 0 \Rightarrow B = 0,\\
y(\pi) &= A\cos(k\pi) = 0,\\
\cos(k\pi) &= 0,\\
k\pi &= \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,\\
k_n &= \frac{1}{2} + n = \frac{2n+1}{2}.
\end{aligned}
$$

Os autovalores são

$$
\lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots
$$

As autofunções são

$$
y_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \blacksquare
$$

5 [20] Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1; \\ x+1, & -1 \le x \le 0; \\ 1-x, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Note que f é par.

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos k}{\pi k^2} \blacksquare \end{aligned}$$