TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 06 Out 2025
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Considere que um sensor pode ser modelado por uma EDO de ordem 2,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{ST}y = \frac{1}{ST}x(t).$$

onde x é a grandeza a ser medida, y é a resposta do sensor, e S,T são dois "tempos de resposta". Calcule a transformada de Fourier da equação acima e obtenha uma expressão para $\widehat{y}$ em função de $\widehat{x}$. **Para a transformada de Fourier de $x(t)$, use a notação**

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{ST}y\right\} &= \mathscr{F}\left\{\frac{1}{ST}x(t)\right\},\\
(\mathrm{i}\omega)^2\widehat{y} + \frac{1}{S}(\mathrm{i}\omega)\widehat{y} + \frac{1}{ST}\widehat{y} &= \frac{1}{ST}\widehat{x},\\
(\mathrm{i}\omega)^2 ST\widehat{y} + (\mathrm{i}\omega)T\widehat{y} + \widehat{y} &= \widehat{x},\\
\left[-\omega^2 ST + (\mathrm{i}\omega)T + 1\right]\widehat{y} &= \widehat{x},
\end{aligned}$$

$$\widehat{y} = \frac{1}{-\omega^2 ST + (\mathrm{i}\omega)T + 1}\widehat{x} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Se $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, $-\infty < x < +\infty$, calcule $[f * g](x)$ (no sentido de convolução de Fourier). Sugestão:

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{I_2}.$$

Note que ξ não muda de sinal em I_1 (onde $\xi \le 0$) nem em I_2 (onde $\xi > 0$): portanto, remova o módulo e trabalhe os sinais. Continue, reunindo novamente a expressão resultante em uma única integral, e integre, lembrando que "minha terra tem palmeiras onde canta o sabiá, seno a cosseno b, seno b cosseno a". Na parte final, você pode usar

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
[f * g](x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{+\xi} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\infty}^{0} \mathrm{e}^{-u} \operatorname{sen}(x+u)\,\mathrm{d}(-u) + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \operatorname{sen}(x+u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \left[\operatorname{sen}(x+\xi) + \operatorname{sen}(x-\xi)\right]\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \left[\operatorname{sen}(x)\cos(\xi) + \operatorname{sen}(\xi)\cos(x)\right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sen}(x)\cos(\xi) - \operatorname{sen}(\xi)\cos(x)\right]\,\mathrm{d}\xi \\
&= 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \operatorname{sen}(x)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= 2\operatorname{sen}(x)\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \operatorname{sen}(x) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Calcule a matriz adjunta de

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 & 1-\mathrm{i} \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 & 1+\mathrm{i} \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$[A^*]^\top = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 3 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Obtenha o operador diferencial adjunto de

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + t^2, \qquad 0 \le t \le 1,\\
y(0) &= 0,
\end{aligned}
$$

no espaço de funções reais quadrado-integráveis sob o produto interno canônico

$$
\langle x(t), y(t) \rangle \equiv \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\left\langle L^{\#}x(t), y(t) \right\rangle &= \langle x(t), Ly(t) \rangle\\
&= \int_0^1 x(t)\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + t^2 y\right]\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \underbrace{x(t)}_{u}\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}v} + \int_0^1 x(t)t^2 y(t)\,\mathrm{d}t\\
&= x(t)y(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 y(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y(t)t^2 x(t)\,\mathrm{d}t\\
&= x(1)y(1) - x(0)\cancelto{0}{y(0)} + \int_0^1 y(t)\left[-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + t^2 x\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Portanto, devemos ter

$$
\begin{aligned}
L^{\#} &= -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + t^2, \qquad 0 \le t \le 1,\\
x(1) &= 0 \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Dada a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{t}{T^2}y = \frac{f(t)}{T},$$

obtenha a função de Green $G(t,\tau)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau) = \frac{f(\tau)G(t,\tau)}{T},$$

$$\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty}\frac{f(\tau)G(t,\tau)}{T}\,\mathrm{d}\tau,$$

$$G(t,\tau)y(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} y(\tau)\frac{\mathrm{d}G(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty}\frac{f(\tau)G(t,\tau)}{T}\,\mathrm{d}\tau.$$

Imponho

$$\lim_{\tau\to\infty} G(t,\tau)y(\tau) = 0$$

e rearranjo os termos restantes:

$$-G(t,0)y(0) + \int_{\tau=0}^{\infty} y(\tau)\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\right]\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty}\frac{f(\tau)G(t,\tau)}{T}\,\mathrm{d}\tau.$$

O problema torna-se

$$-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} = \delta(\tau - t), \qquad G(t,\infty) = 0.$$

Primeiro, procuro uma solução do problema homogêneo:

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} + h(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{h\tau}{T^2},\\
\frac{dh}{h} &= \frac{\tau d\tau}{T^2},\\
\ln\frac{h(t,\tau)}{h(t,0)} &= \frac{\tau^2}{2T^2},\\
h(t,\tau) &= h(t,0)\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right].
\end{aligned}$$

Agora procuro a solução para G pelo método de variação de parâmetros:

$$\begin{aligned}
G(t,\tau) &= A(t,\tau)\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] \Rightarrow\\
-\frac{\mathrm{d}G(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{\mathrm{d}A(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] - A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] \Rightarrow\\
-\frac{\mathrm{d}A(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] - A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] &+ A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] = \delta(\tau - t)
\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A(t,\xi)}{\mathrm{d}\xi} &= -\exp\left[-\frac{\xi^2}{2T^2}\right]\delta(\xi - t);\\
A(t,\tau) - A(t,0) &= \int_{\xi=0}^{\tau} -\exp\left[-\frac{\xi^2}{2T^2}\right]\delta(\xi - t)\,\mathrm{d}\xi;\\
A(t,\tau) &= A(t,0) - H(\tau - t)\exp\left[-\frac{t^2}{2T^2}\right];\\
G(t,\tau) &= \exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right]\left[A(t,0) - H(\tau - t)\exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Para que $G(t,\infty) = 0$, é necessário que

$$A(t,0) = \exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right).$$

Finalmente,

$$G(t,\tau) = [1 - H(\tau - t)]\exp\left(\frac{\tau^2 - t^2}{2T^2}\right) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹