TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 29 Ago 2025
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Dada a equação diferencial

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}x},\\
y(0) &= 0,\\
y'(0) &= 1,
\end{aligned}
$$

obtenha a transformada de Laplace $\overline{y}(s)$.
Sugestão: Faça todas as contas utilizando constantes (que você vai encontrar pelo caminho) **complexas**. **Não** utilize a fórmula de Euler. Escreva

$$
s^2 + 1 = (s - \mathrm{i})(s + \mathrm{i}).
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y\right\} &= \mathscr{L}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right\},\\
s^2\overline{y}(s) - sy(0) - y'(0) + \overline{y} &= \frac{1}{s-\mathrm{i}},\\
(s^2+1)\overline{y}(s) - 1 &= \frac{1}{s-\mathrm{i}},\\
(s^2+1)\overline{y}(s) &= 1 + \frac{1}{s-\mathrm{i}},\\
(s^2+1)\overline{y}(s) &= \frac{s-\mathrm{i}+1}{s-\mathrm{i}},\\
\overline{y}(s) &= \frac{s-\mathrm{i}+1}{(s^2+1)(s-\mathrm{i})},\\
&= \frac{s-\mathrm{i}+1}{(s+\mathrm{i})(s-\mathrm{i})^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Sabendo que

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{ax}\} = \frac{1}{s-a},$$
$$\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s},$$
$$\mathscr{L}\{x\} = \frac{1}{s^2},$$

obtenha a transformada de Laplace inversa de

$$\frac{s-\mathrm{i}+1}{s^2(s-\mathrm{i})}.$$

Sugestão: Faça todas as contas utilizando constantes (que você vai encontrar pelo caminho) **complexas**. **Não** utilize a fórmula de Euler.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Decompomos em frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{s-\mathrm{i}+1}{s^2(s-\mathrm{i})} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s-\mathrm{i})},\\
&= \frac{As(s-\mathrm{i}) + B(s-\mathrm{i}) + Cs^2}{s^2(s-\mathrm{i})},\\
s-\mathrm{i}+1 &= As^2 - \mathrm{i}As + Bs - \mathrm{i}B + Cs^2,\\
&= (A+C)s^2 + (B-\mathrm{i}A)s - \mathrm{i}B;
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
A + C &= 0,\\
B - \mathrm{i}A &= 1,\\
-\mathrm{i}B &= -\mathrm{i} + 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}\\
&= \frac{-1}{\mathrm{i}} + 1\\
&= 1 + \mathrm{i};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1-B}{-\mathrm{i}}\\
&= \frac{-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}\\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$C = -1.$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
\overline{y}(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1+\mathrm{i}}{s^2} - \frac{1}{s-\mathrm{i}},\\
y(x) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1+\mathrm{i}}{s^2} - \frac{1}{s-\mathrm{i}}\right\}\\
&= 1 + (1+\mathrm{i})x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Para $a > 0$, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \delta(t-a),\\
y(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau-a),\\
y(t) &= \int_0^t \delta(\tau-a)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \begin{cases} 0 & t < a,\\ 1 & t > a,\end{cases}\\
&= H(t-a) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Se $w(x)$ é uma função real positiva e $\mathbb{V}$ é o espaço das funções complexas $f(x)$ (ambas definidas no intervalo real $[a,b]$) tais que

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

verifique se

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f, g \in \mathbb{V},$$

é um produto interno legítimo.
Observação: Não é necessário verificar se as integrais que aparecerão pelo caminho convergem. Suponha que todas as integrais que você encontrar convergem.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_a^b f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b [g(x)^* f(x)w(x)]^*\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\int_a^b g(x)^* f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right]^* \\
&= \langle g, f\rangle^*. \qquad \checkmark \\
\langle f, g+h\rangle &= \int_a^b f^*(x)[g(x)+h(x)]w(x)\,\mathrm{d}x \\
\langle f, g+h\rangle &= \int_a^b f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^*(x)h(x)w(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle \qquad \checkmark \\
\langle f, \alpha g\rangle &= \int_a^b f^*(x)[\alpha g(x)]w(x)\,\mathrm{d}x \\
\langle f, \alpha g\rangle &= \alpha \int_a^b f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \alpha\,\langle f, g\rangle \qquad \checkmark \\
\langle f, f\rangle &= \int_a^b f^*(x)f(x)w(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,\mathrm{d}x \\
&\begin{cases} > 0, & f(x) \neq 0 \text{ quase sempre}, \qquad \checkmark \\ = 0, & f(x) = 0 \text{ quase sempre}. \qquad \checkmark \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto, a operação $\langle f, g\rangle$ definida acima é um produto interno legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Se

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le +1, \end{cases}$$

a) [10] Obtenha a série de Fourier **complexa** de $f(x)$ no intervalo $[-1, 1]$.

b) [10] **Simplifique** para uma série puramente real.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} a &= -1, \\ b &= +1, \\ L &= 2. \end{aligned}$$

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Se $n \ne 0$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n x}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ c_n &= \frac{1}{2}\int_0^{+1} \mathrm{e}^{-\pi i n x}\,\mathrm{d}x \\ c_n &= \frac{1}{2(-\pi \mathrm{i} n)}\int_0^{+1} \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,(-\pi \mathrm{i} n)\mathrm{d}x \\ c_n &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi n}\left[\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\right]_0^1 \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi n}\left[\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n} - 1\right] \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ par}, \\ \frac{-\mathrm{i}}{\pi n} & n \text{ ímpar}; \end{cases} \\ f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\mathrm{i}}{\pi(2n+1)}\left[\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(2n+1)x} - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(2n+1)x}\right] \\ &= \frac{1}{2} - \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2n+1)} 2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\pi(2n+1)x); \\ f(x) &= \frac{1}{2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2n+1)}\,\mathrm{sen}(\pi(2n+1)x) \; \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹