

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\vec{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\approx$.

1 [20] Para a função incógnita $G(t, \tau)$, resolva a EDO

$$\frac{dG}{d\tau} + \frac{1}{T}G = \delta(\tau - t), \quad G(t, 0) = 0,$$

onde $\delta(\cdot)$ é a delta de Dirac.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= u(t, \tau)v(t, \tau), \\ \left[u \frac{dv}{d\tau} + v \frac{du}{d\tau} \right] + \frac{1}{T}uv &= \delta(\tau - t), \\ u \left[\frac{dv}{d\tau} + \frac{1}{T}v \right] + v \frac{du}{d\tau} &= \delta(\tau - t), \\ \frac{dv}{d\tau} &= -\frac{1}{T}v, \\ \frac{dv}{v} &= -\frac{d\tau}{T}, \\ \int_{v(t,0)}^{v(t,\tau)} \frac{dv}{v} &= -\frac{1}{T} \int_{\xi=0}^{\tau} d\xi, \\ \ln \frac{v(t, \tau)}{v(t, 0)} &= -\frac{\tau}{T}, \\ v(t, \tau) &= v(t, 0) \exp \left[-\frac{\tau}{T} \right]. \end{aligned}$$

Prosseguimos para $u(t, \tau)$:

$$\begin{aligned} v(t, 0) \exp \left[-\frac{\tau}{T} \right] \frac{du(t, \tau)}{d\tau} &= \delta(\tau - t), \\ \frac{du(t, \tau)}{d\tau} &= \frac{1}{v(t, 0)} \exp \left[\frac{\tau}{T} \right] \delta(\tau - t), \\ \int_{u(t,0)}^{u(t,\tau)} du &= \frac{1}{v(t, 0)} \int_{\xi=0}^{\tau} \exp \left[\frac{\xi}{T} \right] \delta(\tau - \xi) d\xi \\ u(t, \tau) - u(t, 0) &= \frac{1}{v(t, 0)} H(\tau - t) \exp \left[\frac{t}{T} \right], \\ u(t, \tau) &= u(t, 0) + \frac{1}{v(t, 0)} H(\tau - t) \exp \left[\frac{t}{T} \right]. \end{aligned}$$

Reunindo $u(t, \tau)$ e $v(t, \tau)$:

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= u(t, \tau)v(t, \tau) \\ &= \left\{ u(t, 0) + \frac{1}{v(t, 0)} H(\tau - t) \exp \left[\frac{t}{T} \right] \right\} v(t, 0) \exp \left[-\frac{\tau}{T} \right] \\ &= G(t, 0) \exp \left[-\frac{\tau}{T} \right] + H(\tau - t) \exp \left[\frac{t}{T} \right] \exp \left[-\frac{\tau}{T} \right] \\ &= \left\{ G(t, 0) + H(\tau - t) \exp \left[\frac{t}{T} \right] \right\} \exp \left[-\frac{\tau}{T} \right] \end{aligned}$$

Se nós prescrevermos $G(t, 0) = 0$,

$$G(t, \tau) = H(\tau - t) \exp \left[\frac{t - \tau}{T} \right] \blacksquare$$

2 [20] **Equivalência das desigualdades do triângulo e de Schwarz para vetores do $\mathbb{R}^2$.** Para o triângulo de lados $|x|$, $|y|$ e $|z|$ da figura, onde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e $z = y - x$, a **desigualdade do triângulo** é

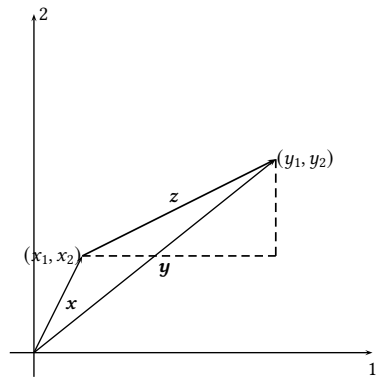
$$|z| \leq |x| + |y|.$$

- a) [10] Escreva a desigualdade do triângulo em termos das coordenadas (x_1, x_2) e (y_1, y_2) mostradas na figura. Elevando sucessivamente ao quadrado, mostre que

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2).$$

- b) [10] Utilizando o produto escalar canônico para vetores do $\mathbb{R}^2$, escreva a desigualdade de Schwarz para os vetores $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Elevando sucessivamente ao quadrado, mostre que, novamente,

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2).$$



Atenção: é obrigatório justificar todos os passos.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

- a) Na figura, a desigualdade do triângulo é

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \\ |y| &= \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \\ |x| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \\ (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 &\leq x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} + y_1^2 + y_2^2, \\ y_1^2 - 2x_1 y_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2x_2 y_2 + x_2^2 &\leq x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} + y_1^2 + y_2^2, \\ -2x_1 y_1 - 2x_2 y_2 &\leq 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \\ -(x_1 y_1 + x_2 y_2) &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \\ (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 &\leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2). \end{aligned}$$

- b) Mas isso é o mesmo que a desigualdade de Schwarz:

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &\leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}, \\ |x_1 y_1 + x_2 y_2| &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \\ (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 &\leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2). \end{aligned}$$

3 [20] Obtenha a série de Fourier de

$$f(x) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right),$$

$$L = b - a,$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx.$$

Aplicando as fórmulas,

$$a = 0,$$

$$b = 1,$$

$$L = 1,$$

$$A_0 = 2 \int_0^1 (1 - x) dx = 1,$$

$$A_n = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(2\pi nx) dx = 0,$$

$$B_n = 2 \int_0^1 (1 - x) \sin(2\pi nx) dx = \frac{1}{\pi n}.$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi nx) \blacksquare$$

4 [20] Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

para $-\infty < x < +\infty$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} |x| e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} |x| [\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)] dx \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{+1} x \cos(kx) dx \\ &= \frac{k \operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1}{\pi k^2} \blacksquare \end{aligned}$$

5 [20] Resolva obrigatoriamente pelo método de separação de variáveis. Você pode deixar todas as integrais indicadas.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \\ \phi(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial \phi(0, t)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\phi(L, t)}{L} + \frac{\partial \phi(L, t)}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $\phi(x, t) = X(x)T(t)$;

$$\begin{aligned}X \frac{dT}{dt} &= a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2}, \\ \frac{1}{a^2 T} \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda, \\ \frac{d^2 X}{dx^2} &= \lambda X, \\ \frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda X &= 0; \\ T \frac{dX(0)}{dx} &= 0, \\ \frac{TX(L)}{L} + T \frac{dX(L)}{dx} &= 0.\end{aligned}$$

Temos portanto um problema de Sturm-Liouville em $X(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda X &= 0; \\ \frac{dX(0)}{dx} &= 0, \\ \frac{X(L)}{L} + \frac{dX(L)}{dx} &= 0.\end{aligned}$$

Para $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}\lambda &= -k^2, \quad k > 0; \\ \frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X &= 0; \\ X(x) &= A \cos(kx) + B \sin(kx), \\ \frac{dX}{dx} &= k [-A \sin(kx) + B \cos(kx)], \\ \frac{dX(0)}{dx} &= kB = 0 \Rightarrow B = 0; \\ X &= A \cos(kx), \\ \frac{dX}{dx} &= -kA \sin(kx), \\ \frac{X(L)}{L} + \frac{dX(L)}{dx} &= A \frac{\cos(kL)}{L} - kA \sin(kL) = 0, \\ \frac{\cos(kL)}{L} - k \sin(kL) &= 0, \\ k \sin(kL) &= \frac{\cos(kL)}{L}, \\ kL &= \cotg(kL).\end{aligned}$$

Portanto os autovalores são

$$k_n = \frac{1}{L} x_n,$$

onde x_n é a n -ésima raiz positiva da equação transcendental

$$x = \cotg(x),$$

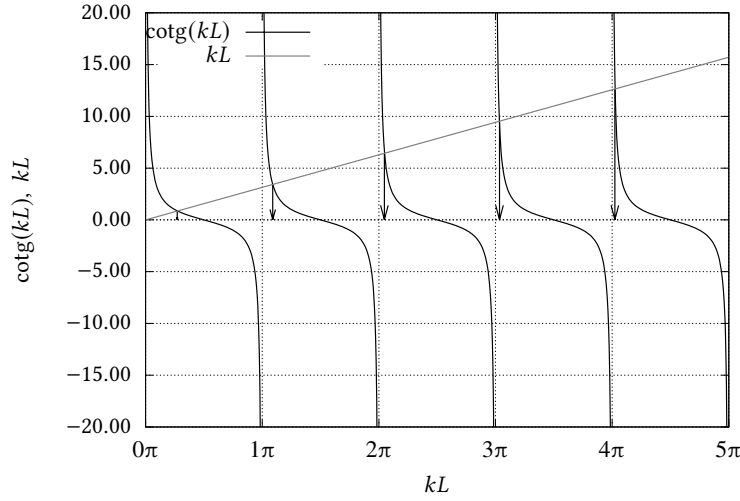


Figura 1: 5 primeiros valores de k para o caso $\lambda = -k^2$.

como mostrado na figura 1. Os autovalores $\lambda_n < 0$ são dados por

$$\lambda_n = -k_n^2.$$

As autofunções são

$$X_n(x) = \cos(k_n x).$$

Para $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} &= 0, \\ X(x) &= Ax + B, \\ \frac{dX}{dx} &= A, \\ \frac{dX(0)}{dx} &= 0 \Rightarrow A = 0; \\ X(x) &= B, \\ \frac{X(L)}{L} + \frac{dX(L)}{dx} &= 0, \\ \frac{B}{L} + 0 &= 0 \Rightarrow B = 0, \end{aligned}$$

e $\lambda = 0$ não pode ser autovalor.

Para $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \lambda &= k^2, \quad k > 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0, \\ X(x) &= A \cosh(kx) + B \sinh(kx), \\ \frac{dX}{dx} &= k [A \sinh(kx) + B \cosh(kx)], \\ \frac{dX(0)}{dx} &= 0 \Rightarrow kB = 0, \quad B = 0; \\ X(x) &= A \cosh(kx), \\ \frac{X(L)}{L} + \frac{dX(L)}{dx} &= A \frac{\cosh(kL)}{L} + kA \sinh(kL) = 0, \\ A \underbrace{\left[\frac{\cosh(kL)}{L} + k \sinh(kL) \right]}_{\neq 0} &= 0 \Rightarrow A = 0, \end{aligned}$$

e portanto $\lambda > 0$ não pode ser autovalor.

Para $T_n(t)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2 T_n} \frac{dT_n}{dt} &= -k_n^2, \\ \frac{dT_n}{T_n} &= -k_n^2 a^2 dt, \\ \ln \frac{T_n(t)}{T_n(0)} &= -k_n^2 a^2 t, \\ T_n(t) &= T_n(0) e^{-k_n^2 a^2 t}.\end{aligned}$$

A solução deve ser da forma

$$\phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_n x) e^{-k_n^2 a^2 t}.$$

Em $t = 0$,

$$\begin{aligned}\phi(x, 0) &= f(x), \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_n x), \\ f(x) \cos(k_m x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_m x) \cos(k_n x), \\ \int_0^L f(x) \cos(k_m x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \cos(k_m x) \cos(k_n x) dx, \\ \int_0^L f(x) \cos(k_m x) dx &= B_m \frac{\sin(2Lk_m) + 2Lk_m}{4k_m}, \\ B_m &= \frac{4k_m}{\sin(2Lk_m) + 2Lk_m} \int_0^L f(x) \cos(k_m x) dx \blacksquare\end{aligned}$$