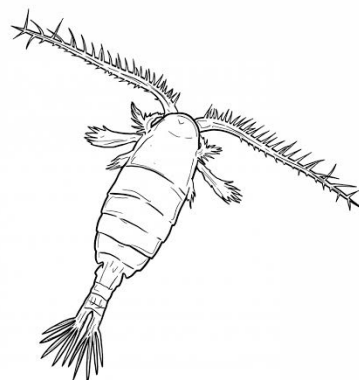


AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO  $\vec{v}$ ; TENSORES DE ORDEM 2 COMO  $\approx$ .

**1** [20] (COM CALCULADORA) [White, 2016, Ex 5.1]: A figura ao lado mostra um *copépode*. Copépodes são pequenos crustáceos presentes em quase todos os habitats de água doce ou salgada. Desejamos saber a força de arrasto da água  $F_p$  (massa específica  $\rho = 998 \text{ kg m}^{-3}$ , viscosidade cinemática  $\nu = 1.0020 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ) sobre um copépode com diâmetro de 1 mm ( $D_p = 1 \text{ mm}$ ) e a velocidade correspondente  $V_p$  com que ele se movimentava. Para isso, construímos um modelo 100 vezes maior ( $D_m = 100 \text{ mm}$ ) e o testamos com glicerina (massa específica  $\rho = 1263 \text{ kg m}^{-3}$ , viscosidade cinemática  $\nu = 1.1876 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ) em um canal com velocidade  $V_m = 30 \text{ cm s}^{-1}$ , encontrando uma força de arrasto no modelo  $F_m = 1,3 \text{ N}$ . Usando análise dimensional,



- [15] Obtenha os dois grupos adimensionais do problema, **utilizando como variáveis comuns**  $\rho$ ,  $\nu$ , e  $D$ .
- [5] Igualando os parâmetros adimensionais do modelo e do protótipo, calcule  $F_p$  e  $V_p$ .

White, F. M. (2016). *Fluid Mechanics*. McGraw Hill Education, New York

#### SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Há 5 variáveis dimensionais, com as seguintes dimensões correspondentes:

|        |                            |
|--------|----------------------------|
| $\rho$ | $\text{M L}^{-3}$          |
| $\nu$  | $\text{L}^2 \text{T}^{-1}$ |
| $D$    | $\text{L}$                 |
| $V$    | $\text{L T}^{-1}$          |
| $F$    | $\text{M L T}^{-2}$        |

Os dois grupos que desejamos podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= V \rho^a \nu^b D^c \\ \llbracket \Pi_1 \rrbracket &= \llbracket V \rrbracket \llbracket \rho \rrbracket^a \llbracket \nu \rrbracket^b \llbracket D \rrbracket^c \\ 1 &= \text{L T}^{-1} [\text{M L}^{-3}]^a [\text{L}^2 \text{T}^{-1}]^b [\text{L}]^c \\ &= \text{M}^a \text{L}^{1-3a+2b+c} \text{T}^{-1-b}.\end{aligned}$$

Obtemos o sistema

$$\begin{aligned}a &= 0, \\ -3a + 2b + c &= -1 \\ -b &= 1\end{aligned}$$

donde  $a = 0$ ,  $b = -1$ ,  $c = 1$  e

$$\Pi_1 = \frac{VD}{\nu}.$$

Observe que  $\Pi_1$  é o *número de Reynolds*.  
Em seguida,

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= F \rho^a v^b D^c \\ \llbracket \Pi_2 \rrbracket &= \llbracket F \rrbracket \llbracket \rho \rrbracket^a \llbracket v \rrbracket^b \llbracket D \rrbracket^c \\ 1 &= \text{M L T}^{-2} [\text{M L}^{-3}]^a [\text{L}^2 \text{T}^{-1}]^b [\text{L}]^c \\ &= \text{M}^{1+a} \text{L}^{1-3a+2b+c} \text{T}^{-2-b}.\end{aligned}$$

Obtemos o sistema

$$\begin{aligned}a &= -1, \\ -3a + 2b + c &= -1 \\ -b &= 2\end{aligned}$$

donde  $a = -1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 0$  e

$$\Pi_2 = \frac{F}{\rho v^2}.$$

No modelo,

$$\begin{aligned}\rho &= 1263 \text{ kg m}^{-3}, \\ v &= 1.1876 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \\ D &= 0.1 \text{ m}, \\ V &= 0.3 \text{ m s}^{-1}, \\ F &= 1.3 \text{ N},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{0.3 \times 0.1}{1.1876 \times 10^{-3}} = 25.2610, \\ \Pi_2 &= \frac{1.3}{1263 \times (1.1876 \times 10^{-3})^2} = 729.7929.\end{aligned}$$

No protótipo,

$$\begin{aligned}\rho &= 998 \text{ kg m}^{-3}, \\ v &= 1.0020 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \\ D &= 0.001 \text{ m}.\end{aligned}$$

Agora fazemos esses dois grupos terem os mesmos valores no protótipo (no copépode):

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{V_p \times 0.001}{1.0020 \times 10^{-6}} = 25.2610 \Rightarrow V_p = \frac{25.2610 \times 1.0020 \times 10^{-6}}{0.001} = 0.0253 \text{ m s}^{-1}; \\ \Pi_2 &= \frac{F_p}{\rho v^2} = \frac{F}{998 \times (1.0020 \times 10^{-6})^2} = 729.7929 \Rightarrow F_p = 729.7924 \times 998 \times (1.0020 \times 10^{-6})^2 = 7.312 \times 10^{-7} \text{ N} \blacksquare\end{aligned}$$

**2** [20] (SEM CALCULADORA) Utilizando a fórmula de Euler com dois sinais,

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x),$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \operatorname{sen}(x),$$

a) [10] obtenha  $\operatorname{sen}(x)$  em função de  $e^{ix}$  e  $e^{-ix}$ ;

b) [10] use (a) para encontrar uma expressão (puramente real) para  $\operatorname{sen}^2(x)$  (**Sugestão:** eleve ao quadrado o lado direito de  $\operatorname{sen}(x) = \dots$  obtido acima).

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix});$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(x) &= \frac{1}{4i^2} (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\ &= -\frac{1}{4} (2 \cos(2x) - 2) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \blacksquare\end{aligned}$$

3 [20] (SEM CALCULADORA) Sabemos que o produto escalar de dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  do  $\mathbb{R}^3$  é dado por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i,$$

onde  $u_i$  e  $v_i$  são os *elementos* de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Considere agora uma base  $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  **não ortonormal**, ou seja,

$$G_{ij} \equiv (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \neq \delta_{ij}.$$

Nessa base,

$$\mathbf{u} = u_{Ei} \mathbf{e}_i,$$

$$\mathbf{v} = v_{Ej} \mathbf{e}_j,$$

onde  $u_{Ei}$  e  $v_{Ej}$  são as **coordenadas** de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  na base E. Utilizando as expressões acima, **e usando obrigatoriamente notação indicial**, calcule  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  em termos de  $u_{Ei}$ ,  $v_{Ej}$  e  $G_{ij}$ .

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_{Ei} \mathbf{e}_i \cdot v_{Ej} \mathbf{e}_j \\ &= u_{Ei} v_{Ej} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \\ &= u_{Ei} G_{ij} v_{Ej}. \end{aligned}$$

Note que podemos escrever matricialmente

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = [\mathbf{u}]_E^\top [\mathbf{G}] [\mathbf{v}]_E \blacksquare$$

**4** [20] (SEM CALCULADORA) Seja  $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  uma base não-ortonormal do  $\mathbb{R}^3$ , com

$$\mathbf{e}_1 = (1, 2, 1),$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 2),$$

$$\mathbf{e}_3 = (1, 0, 1).$$

Obtenha uma base ortonormal a partir de  $E$  utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1;$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{1}{|\mathbf{f}_1|} \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 2, 1);$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{g}_1) \mathbf{g}_1 \\ &= (-2/3, -1/3, 4/3); \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{1}{|\mathbf{f}_2|} \mathbf{f}_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} (-2/3, -1/3, 4/3) = \frac{1}{\sqrt{21}} (-2, -1, 4);$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{g}_1) \mathbf{g}_1 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{g}_2) \mathbf{g}_2 \\ &= (6/7, -4/7, 2/7) \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{1}{|\mathbf{f}_3|} \mathbf{f}_3 = \frac{\sqrt{7}}{2^{3/2}} (6/7, -4/7, 2/7) = \frac{1}{\sqrt{14}} (3, -2, 1) \blacksquare$$

**5** [20] (SEM CALCULADORA) Usando a base canônica  $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  são vetores do  $\mathbb{R}^3$ , escreva em notação indicial (ou seja: escreva em termos dos elementos  $u_i, v_j$ , etc.)

$$([\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]) \cdot \mathbf{c}$$

e simplifique **ao máximo**.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k; \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \epsilon_{lmn} a_l b_m \mathbf{e}_n; \\ [\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k \times \epsilon_{lmn} a_l b_m \mathbf{e}_n \\ &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \epsilon_{lmn} a_l b_m \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_n \\ &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \epsilon_{lmn} a_l b_m \epsilon_{knp} \mathbf{e}_p \\ &= \epsilon_{knp} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m \mathbf{e}_p; \\ ([\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]) \cdot \mathbf{c} &= \epsilon_{knp} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m \mathbf{e}_p \cdot c_q \mathbf{e}_q \\ &= \epsilon_{knp} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m c_q (\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_q) \\ &= \epsilon_{knp} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m c_q \delta_{pq} \\ &= \epsilon_{knp} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m c_p \\ &= \epsilon_{npk} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m c_p \\ &= [\delta_{ni} \delta_{pj} - \delta_{nj} \delta_{pi}] \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m c_p \\ &= \epsilon_{lmi} u_i v_j a_l b_m c_j - \epsilon_{lmj} u_i v_j a_l b_m c_i \\ &= \epsilon_{lmi} a_l b_m u_i (v_j c_j) - \epsilon_{lmj} a_l b_m v_j (u_i c_i) \\ &= \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}) - \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}) \blacksquare \end{aligned}$$

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO  $\vec{v}$ ; TENSORES DE ORDEM 2 COMO  $\tilde{A}$ .

**1** [20] Dada a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

- a) [10] **Prove** que  $\lambda = -1$  é um dos autovalores.  
 b) [10] Obtenha o autovetor associado a  $\lambda = -1$ .

**SOLUÇÃO DA QUESTÃO:**

a) A equação característica é

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)[- \lambda(1 - \lambda) - 1] - 1[(1 - \lambda) - 2] + 2[1 + 2\lambda] &= 0, \\ (1 - \lambda)[\lambda^2 - \lambda - 1] + [\lambda + 1] + [4\lambda + 2] &= 0, \\ -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - \lambda - 1 + \lambda + 1 + 4\lambda + 2 &= 0, \\ -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Este último polinômio tem raiz  $-1$ ; de fato,

$$1 + 2 - 5 + 2 = 0.$$

b) Agora precisamos resolver

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

para o autovetor  $(x_1, x_2, x_3)$ :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -x_1, \\ x_1 + x_3 &= -x_2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -x_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0; \end{aligned}$$

$$x_1 + x_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3, \\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Um autovetor possível, portanto, é  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -1)$  ■

**2** [20] Dadas as funções

$$f(x, y, u, v) = x + y + u + v,$$

$$g(x, y, u, v) = x^2 + y^2 + u^2 + v^2,$$

calcule o jacobiano  $\partial(f, g)/\partial(u, v)$ .

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\partial(f, g)/\partial(u, v) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \\ &= 2v - 2u \blacksquare\end{aligned}$$

**3** [20] Calcule a área da superfície do parabolóide hiperbólico  $z = x^2 - y^2$  que se projeta sobre a região  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$  do plano  $Oxy$ .

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se  $z = f(x, y)$ , então a fórmula para o cálculo da área da superfície não-plana (em geral) é

$$S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dydx.$$

Portanto,  $R_{x,y} = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$  e

$$\begin{aligned} S &= \iint_{R_{x,y}} \sqrt{1 + (2x)^2 + (-2y)^2} dydx, \\ &= \iint_{R_{x,y}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dydx, \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta, \\ &= \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \pi \blacksquare \end{aligned}$$

4 [20] Em um fluido, o campo de velocidade

$$\mathbf{u} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4z\mathbf{k}$$

atravessa região esférica do espaço

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Calcule

$$\oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \, dS,$$

onde  $\mathcal{S}$  é a superfície da esfera, e  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal apontando para fora da superfície em cada ponto de  $\mathcal{S}$ .

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Usamos o teorema da divergência:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \, dS &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} (2 + 2 - 4) \, dV \\ &= 0 \blacksquare \end{aligned}$$

**5** [20] Encontre a solução geral de

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = x^2.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}y &= uv, \\u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + x^2 y &= x^2, \\u \underbrace{\left[ \frac{dv}{dx} + x^2 v \right]}_{=0} + v \frac{du}{dx} &= x^2, \\\frac{dv}{dx} + x^2 v &= 0, \\\frac{dv}{dx} &= -x^2 v, \\\frac{dv}{v} &= -x^2 dx, \\\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= \int_0^x -\xi^2 d\xi, \\\ln \frac{v}{v_0} &= -\frac{1}{3} x^3, \\v(x) &= v_0 e^{-\frac{1}{3} x^3}. \\v_0 e^{-\frac{1}{3} x^3} \frac{du}{dx} &= x^2, \\\frac{du}{dx} &= \frac{1}{v_0} x^2 e^{\frac{1}{3} x^3}, \\\int_{u_0}^u dv &= \frac{1}{v_0} \int_0^x \xi^2 e^{\frac{1}{3} \xi^3} d\xi, \\u - u_0 &= \frac{1}{v_0} \left[ e^{\frac{x^3}{3}} - 1 \right], \\u &= u_0 + \frac{1}{v_0} \left[ e^{\frac{x^3}{3}} - 1 \right], \\y &= \left\{ u_0 + \frac{1}{v_0} \left[ e^{\frac{x^3}{3}} - 1 \right] \right\} v_0 e^{-\frac{1}{3} x^3} \\&= u_0 v_0 e^{-\frac{1}{3} x^3} + \left[ 1 - e^{-\frac{1}{3} x^3} \right] \\&= [u_0 v_0 - 1] e^{-\frac{1}{3} x^3} + 1 \\&= C e^{-\frac{1}{3} x^3} + 1 \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso  $\Rightarrow$

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO  $\vec{v}$ ; TENSORES DE ORDEM 2 COMO  $\approx$ .

**1** [20] Utilizando obrigatoriamente a regra de Leibnitz, calcule

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \cos(t^2) dt$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A regra é

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt = f(b, x) \frac{db}{dx} - f(a, x) \frac{da}{dx} + \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt &= \cos(x^2) \times 1 - \cos(0^2) \times 0 + \int_0^x \frac{\partial [\cos(t^2)]}{\partial x} dt \\ &= \cos(x^2) \blacksquare \end{aligned}$$

**2** [20] Calcule a integral de linha

$$I = \int_{\Gamma} (x + y + z) \, d\ell$$

sobre a curva

$$\Gamma : \begin{aligned} x &= 1, \\ y &= \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \\ z &= \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad t \in [0, 1].$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \left(1, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^2}{\sqrt{2}}\right), \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}t, \frac{2}{\sqrt{2}}t\right), \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{0 + \frac{4}{2}t^2 + \frac{4}{2}t^2}, \\ &= \sqrt{0 + 2t^2 + 2t^2} = \sqrt{4t^2}, \\ d\ell &= |\mathbf{v}| \, dt = 2t \, dt, \\ I &= \int_{t=0}^1 \left(1 + \frac{t^2}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\right) 2t \, dt = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**3** [20] Um campo de velocidade é dado por

$$\mathbf{u} = (y^2, z^2, x^2);$$

calcule a vorticidade  $\nabla \times \mathbf{u}$ .

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} \\ &= -2z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} - 2y\mathbf{k} \blacksquare\end{aligned}$$

**4** [20]

Calcule a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$$

em torno de  $z = 0$  na região  $|z| > 1$ .

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: Note que

$$|z| > 1, \\ \frac{1}{|z|} = \left| \frac{1}{z} \right| < 1.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z-1)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} \right] \\ &= \frac{1}{2z} \left[ \frac{1}{(1-\frac{1}{z})} - \frac{1}{(1+\frac{1}{z})} \right] \\ &= \frac{1}{2z} \left[ \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{2z} \left[ \frac{2}{z} + \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^5} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \dots \blacksquare \end{aligned}$$

5 [20] Sabemos que a solução geral de

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

é

$$y(x) = A \cos(x) + B \sin(x).$$

Obtenha esse resultado fazendo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

derivando duas vezes, e substituindo na EDO. Note que isso **não** é o método de Frobenius (não há pontos singulares), mas o procedimento é **similar** (e mais simples: **não há nenhuma equação indicial** neste problema!).

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}.$$

Substituindo na EDO:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0;$$

$$n-2 = m,$$

$$n = m+2,$$

$$\sum_{m=-2}^{\infty} (m+1)(m+2) a_{m+2} x^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Os primeiros dois termos do 1º somatório são nulos ( $m = -2$  e  $m = -1$ ); portanto, o somatório efetivamente começa de 0. Então,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2) a_{m+2} x^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n] x^n = 0,$$

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}.$$

A relação de recorrência varre os pares partindo de  $n = 0$ , ou os ímpares partindo de  $n = 1$ . Sem perda de generalidade, faça  $a_0 = 1$ ; então,

$$a_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2!},$$

$$a_4 = +\frac{1}{24} = \frac{1}{4!},$$

$$a_6 = -\frac{1}{720} = -\frac{1}{6!},$$

$$a_8 = +\frac{1}{40320} = \frac{1}{8!},$$

etc., e a primeira solução é

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

Continue a solução no verso  $\Rightarrow$

Analogamente, faça  $a_1 = 1$  e obtenha

$$a_3 = -\frac{1}{6} = \frac{1}{3!},$$

$$a_5 = +\frac{1}{120} = \frac{1}{5!},$$

$$a_7 = -\frac{1}{5040} = -\frac{1}{7!},$$

$$a_8 = +\frac{1}{362880} = \frac{1}{9!},$$

etc., e a segunda solução é

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 \\ &= \text{sen}(x) \blacksquare \end{aligned}$$

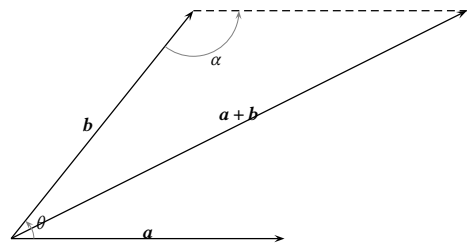
AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO  $\vec{v}$ ; TENSORES DE ORDEM 2 COMO  $\approx$ .

**1** [20] Para a figura ao lado, prove que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta).$$

**Sugestão:** aplique o teorema dos cossenos ao triângulo com um lado tracejado (paralelo a  $\mathbf{a}$ ) na figura, observando que  $\alpha + \theta = \pi$ .



**SOLUÇÃO DA QUESTÃO:**

Temos que

$$\alpha = \pi - \theta \Rightarrow \cos(\alpha) = -\cos(\theta).$$

Pelo teorema dos cossenos, o triângulo com lado tracejado da figura possui lados com comprimentos  $|\mathbf{a}|$ ,  $|\mathbf{b}|$  e  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ , de forma que

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\alpha) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta) \blacksquare \end{aligned}$$

**2** [20] Numa base ortonormal, a *contração* de dois tensores  $A, B$  é definida por

$$A : B = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j : B_{lm} \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \equiv A_{ij} B_{lm} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m).$$

Se  $S$  é um tensor simétrico de ordem 2, e  $A$  é um tensor anti-simétrico de ordem 2:

$$S = S_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad S_{ij} = S_{ji}; \quad A = A_{lm} \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m, \quad A_{lm} = -A_{ml},$$

mostre que

$$S : A = 0.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} S : A &= S_{ij} A_{lm} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m). \\ &= S_{ij} A_{lm} \delta_{jl} \delta_{im} \\ &= S_{ij} A_{ji} \\ &= \frac{1}{2} S_{ij} A_{ji} + \frac{1}{2} S_{ji} A_{ij} \\ &= \frac{1}{2} S_{ij} (A_{ji} + A_{ij}) = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

**3** [20] A expansão em série de Taylor de uma função  $f(x, y)$  até a ordem 2 em torno de  $(0, 0)$  é dada por

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} y + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} y^2 \right] + \dots$$

Obtenha a série de Taylor de  $f(x, y) = \exp((x + y)^2)$  até a ordem 2.

**Obs:** A notação

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}$$

significa a derivada de  $f(x, y)$  em relação a  $x$  avaliada em  $(0, 0)$ , e de forma análoga para as demais.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, \\ \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} &= 2(x + y)e^{(x+y)^2} \Big|_{(0,0)} = 0, \\ \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} &= 2(x + y)e^{(x+y)^2} \Big|_{(0,0)} = 0, \\ \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} &= 4(x + y)^2 e^{(x+y)^2} + 2e^{(x+y)^2} \Big|_{(0,0)} = 2, \\ \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} &= 4(x + y)^2 e^{(x+y)^2} + 2e^{(x+y)^2} \Big|_{(0,0)} = 2, \\ \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} &= 4(x + y)^2 e^{(x+y)^2} + 2e^{(x+y)^2} \Big|_{(0,0)} = 2, \\ \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} &= 4(x + y)^2 e^{(x+y)^2} + 2e^{(x+y)^2} \Big|_{(0,0)} = 2; \\ f(x, y) &= 1 + (x^2 + 2xy + y^2) + \dots \blacksquare \end{aligned}$$

**4** [20] Obtenha a solução geral de

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^2.$$

**Obs:** nesta questão, você pode (e deve) usar o seguinte resultado:

$$\int x^2 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) dx = x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C,$$

onde  $\operatorname{erfi}(x)$  é (neste caso) uma função **real** e **ímpar** cuja série de Taylor é conhecida:

$$\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n-1/2} x^{2n+1}}{n!(1+2n)}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} y &= uv, \\ \frac{d[uv]}{dx} + x[uv] &= x^2, \\ u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + xuv &= x^2, \\ u \left[ \frac{dv}{dx} + xv \right] + v \frac{du}{dx} &= x^2, \\ \frac{dv}{dx} + xv &= 0, \\ \frac{dv}{dx} &= -xv, \\ \frac{dv}{v} &= -x dx, \\ \int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'} &= \int_{\xi=0}^x -\xi d\xi \\ \ln \frac{v(x)}{v_0} &= -\frac{1}{2}x^2, \\ v(x) &= v_0 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right); \\ v_0 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \frac{du}{dx} &= x^2, \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{v_0} x^2 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right), \\ du &= \frac{1}{v_0} x^2 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) dx, \\ \int_{u_0}^u du' &= \frac{1}{v_0} \int_{\xi=0}^x \xi^2 \exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi, \\ u - u_0 &= \frac{1}{v_0} \left\{ \left[ x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] - \underbrace{\left[ 0 \exp\left(\frac{1}{2}0\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}\left(\frac{0}{\sqrt{2}}\right) \right]}_{=0} \right\}, \\ u - u_0 &= \frac{1}{v_0} \left[ x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right], \\ u &= u_0 + \frac{1}{v_0} \left[ x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]; \\ y = uv &= \left\{ u_0 + \frac{1}{v_0} \left[ x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] \right\} v_0 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \\ &= u_0 v_0 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \left[ x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \\ &= y_0 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \left[ x - \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso  $\Rightarrow$

5 [20] Obtenha uma solução LI de

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - xy = 0.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na EDO:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Faça

$$\begin{aligned} m+r &= n+r+1, \\ m &= n+1, \\ n &= m-1. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{m+r} &= 0, \\ [(r-1)r] a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-1)(n+r) a_n - a_{n-1}] x^{n+r} &= 0; \end{aligned}$$

A equação indicial é

$$\begin{aligned} (r-1)r &= 0, \\ r_1 &= 1, \\ r_2 &= 0. \end{aligned}$$

As raízes diferem por um inteiro. Mas o enunciado só pede **uma** solução LI, e sabemos que a maior raiz *sempre* produz uma solução. Então,  $r_1 = 1$  e

$$\begin{aligned} n(n+1) a_n - a_{n-1} &= 0, \\ a_n &= \frac{a_{n-1}}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Fazendo  $a_0 = 1$ ,

$$y_1(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{144}x^4 + \frac{1}{2880}x^5 + \dots \blacksquare$$