TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
S, 02 jul 2025
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________

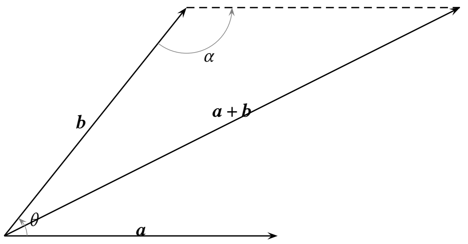
AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

**1** [20] Para a figura ao lado, prove que

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\theta).$$

**Sugestão:** aplique o teorema dos cossenos ao triângulo com um lado tracejado (paralelo a $\boldsymbol{a}$) na figura, observando que $\alpha + \theta = \pi$.




SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Temos que

$$\alpha = \pi - \theta \Rightarrow \cos(\alpha) = -\cos(\theta).$$

Pelo teorema dos cossenos, o triângulo com lado tracejado da figura possui lados com comprimentos $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ e $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$, de forma que

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\alpha)\\ &= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\theta) \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

**2** [20] Numa base ortonormal, a *contração* de dois tensores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ é definida por

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j : B_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \equiv A_{ij}B_{lm}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m).$$

Se $\boldsymbol{S}$ é um tensor simétrico de ordem 2, e $\boldsymbol{A}$ é um tensor anti-simétrico de ordem 2:

$$\boldsymbol{S} = S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\ S_{ij} = S_{ji}; \qquad \boldsymbol{A} = A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m,\ A_{lm} = -A_{ml},$$

mostre que

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} = 0.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} &= S_{ij}A_{lm}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m).\\
&= S_{ij}A_{lm}\delta_{jl}\delta_{im}\\
&= S_{ij}A_{ji}\\
&= \frac{1}{2}S_{ij}A_{ji} + \frac{1}{2}S_{ji}A_{ij}\\
&= \frac{1}{2}S_{ij}\left(A_{ji} + A_{ij}\right) = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

**3** [20] A expansão em série de Taylor de uma função $f(x,y)$ até a ordem 2 em torno de $(0,0)$ é dada por

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y \\
&+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}\,x^2 + 2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}\,xy + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}\,y^2\right] + \ldots
\end{aligned}
$$

Obtenha a série de Taylor de $f(x,y) = \exp\left((x+y)^2\right)$ até a ordem 2.
**Obs:** A notação

$$
\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}
$$

significa a derivada de $f(x,y)$ em relação a $x$ avaliada em $(0,0)$, e de forma análoga para as demais.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= 1, \\
\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= 2(x+y)\mathrm{e}^{(x+y)^2}\Big|_{(0,0)} = 0, \\
\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= 2(x+y)\mathrm{e}^{(x+y)^2}\Big|_{(0,0)} 0, \\
\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} &= 4\ (x+y)^2\ \mathrm{e}^{(x+y)^2} + 2\,\mathrm{e}^{(x+y)^2}\Big|_{(0,0)} = 2, \\
\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} &= 4\ (x+y)^2\ \mathrm{e}^{(x+y)^2} + 2\,\mathrm{e}^{(x+y)^2}\Big|_{(0,0)} = 2, \\
\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} &= 4\ (x+y)^2\ \mathrm{e}^{(x+y)^2} + 2\,\mathrm{e}^{(x+y)^2}\Big|_{(0,0)} = 2, \\
\frac{\partial^y(}{\partial f(0,0)^y} 2 &= 4\ (x+y)^2\ \mathrm{e}^{(x+y)^2} + 2\,\mathrm{e}^{(x+y)^2}\Big|_{(0,0)} = 2;
\end{aligned}
$$

$$
f(x,y) = 1 + \left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \ldots \ \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

**4** [20] Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = x^2.$$

**Obs:** nesta questão, você pode (e deve) usar o seguinte resultado:

$$\int x^2 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\,\mathrm{d}x = x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C,$$

onde $\operatorname{erfi}(x)$ é (neste caso) uma função **real** e **ímpar** cuja série de Taylor é conhecida:

$$\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n-1/2}x^{2n+1}}{n!(1+2n)}.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
\frac{\mathrm{d}[uv]}{\mathrm{d}x} + x[uv] &= x^2,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + xuv &= x^2,\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + xv\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x^2,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + xv &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -xv,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -x\mathrm{d}x,\\
\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v'}{v'} &= \int_{\xi=0}^{x} -\xi\,\mathrm{d}\xi\\
\ln\frac{v(x)}{v_0} &= -\frac{1}{2}x^2,\\
v(x) &= v_0\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right);\\
v_0\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x^2,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{v_0}x^2\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right),\\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{v_0}x^2\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\,\mathrm{d}x,\\
\int_{u_0}^{u}\mathrm{d}u' &= \frac{1}{v_0}\int_{\xi=0}^{x}\xi^2\exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)\,\mathrm{d}\xi,\\
u - u_0 &= \frac{1}{v_0}\left\{\left[x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] - \left[\underbrace{0\exp\left(\frac{1}{2}0\right)}_{=0} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfi}\underbrace{\left(\frac{0}{\sqrt{2}}\right)}_{=0}\right]\right\},\\
u - u_0 &= \frac{1}{v_0}\left[x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right],\\
u &= u_0 + \frac{1}{v_0}\left[x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right];\\
y = uv &= \left\{u_0 + \frac{1}{v_0}\left[x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\}v_0\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\\
&= u_0v_0\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \left[x\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\\
&= y_0\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \left[x - \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

**5** [20] Obtenha uma solução LI de

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - xy = 0.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na EDO:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Faça

$$\begin{aligned} m + r &= n + r + 1, \\ m &= n + 1, \\ n &= m - 1. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{m+r} &= 0, \\ [(r-1)r]\, a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) a_n - a_{n-1}\right] x^{n+r} &= 0; \end{aligned}$$

A equação indicial é

$$\begin{aligned} (r-1)r &= 0, \\ r_1 &= 1, \\ r_2 &= 0. \end{aligned}$$

As raízes diferem por um inteiro. Mas o enunciado só pede **uma** solução LI, e sabemos que a maior raiz *sempre* produz uma solução. Então, $r_1 = 1$ e

$$\begin{aligned} n(n+1) a_n - a_{n-1} &= 0, \\ a_n &= \frac{a_{n-1}}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Fazendo $a_0 = 1$,

$$y_1(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{144}x^4 + \frac{1}{2880}x^5 + \ldots \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹