TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 30 jun 2025
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Utilizando obrigatoriamente a regra de Leibnitz, calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A regra é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t = f(b,x)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} - f(a,x)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}t.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t &= \cos(x^2)\times 1 - \cos(0^2)\times 0 + \int_0^x \cancelto{0}{\frac{\partial[\cos(t^2)]}{\partial x}}\,\mathrm{d}t\\ &= \cos(x^2)\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [20] Calcule a integra de linha

$$I = \int_\Gamma (x + y + z)\,\mathrm{d}\ell$$

sobre a curva

$$\Gamma : \qquad \begin{aligned} x &= 1, \\ y &= \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \\ z &= \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \qquad t \in [0, 1].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (1, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^2}{\sqrt{2}}), \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (0, \frac{2}{\sqrt{2}}t, \frac{2}{\sqrt{2}}t), \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{0 + \frac{4}{2}t^2 + \frac{4}{2}t^2}, \\
&= \sqrt{0 + 2t^2 + 2t^2} = \sqrt{4t^2}, \\
\mathrm{d}\ell &= |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t = 2t\mathrm{d}t, \\
I &= \int_{t=0}^{1} \left(1 + \frac{t^2}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\right) 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Um campo de velocidade é dado por

$$\boldsymbol{u} = (y^2, z^2, x^2);$$

calcule a vorticidade $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} \\
&= -2z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} - 2y\boldsymbol{k} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20]
Calcule a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$$

em torno de $z = 0$ na região $|z| > 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: Note que

$$\begin{aligned} |z| &> 1, \\ \frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right| &< 1. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z+1)(z-1)} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{2z}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{2z}\left[\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \ldots\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \ldots\right)\right] \\
&= \frac{1}{2z}\left[\frac{2}{z} + \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^5} + \ldots\right] \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \ldots \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Sabemos que a solução geral de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

é

$$y(x) = A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x).$$

Obtenha esse resultado fazendo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

derivando duas vezes, e substituindo na EDO. Note que isso **não** é o método de Frobenius (não há pontos singulares), mas o procedimento é **similar** (e mais simples: **não há nenhuma equação indicial** neste problema!).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-11}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na EDO:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0; \\ n - 2 &= m, \\ n &= m + 2, \\ \sum_{m=-2}^{\infty} (m+1)(m+2) a_{m+2} x^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0. \end{aligned}$$

Os primeiros dois termos do 1º somatório são nulos ($m = -2$ e $m = -1$); portanto, o somatório efetivamente começa de 0. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2) a_{m+2} x^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n\right] x^n &= 0, \\ a_{n+2} &= -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

A relação de recorrência varre os pares partindo de $n = 0$, ou os ímpares partindo de $n = 1$. Sem perda de generalidade, faça $a_0 = 1$; então,

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2} = \frac{1}{2!}, \\ a_4 &= +\frac{1}{24} = \frac{1}{4!}, \\ a_6 &= -\frac{1}{720} = -\frac{1}{6!}, \\ a_8 &= +\frac{1}{40320} = \frac{1}{8!}, \end{aligned}$$

etc., e a primeira solução é

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Analogamente, faça $a_1 = 1$ e obtenha

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{1}{6} = \frac{1}{3!},\\
a_5 &= +\frac{1}{120} = \frac{1}{5!},\\
a_7 &= -\frac{1}{5040} = -\frac{1}{7!},\\
a_8 &= +\frac{1}{362880} = \frac{1}{9!},
\end{aligned}
$$

etc., e a segunda solução é

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9\\
&= \operatorname{sen}(x) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$