TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 30 mai 2025
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Dada a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a) [10] **Prove** que $\lambda = -1$ é um dos autovalores.

b) [10] Obtenha o autovetor associado a $\lambda = -1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) A equação característica é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} (1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-1] - 1[(1-\lambda)-2] + 2[1+2\lambda] &= 0, \\ (1-\lambda)[\lambda^2-\lambda-1] + [\lambda+1] + [4\lambda+2] &= 0, \\ -\lambda^3+\lambda^2+\lambda+\lambda^2-\lambda-1+\lambda+1+4\lambda+2 &= 0, \\ -\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda+2 &= 0. \end{aligned}$$

Este último polinômio tem raiz -1; de fato,

$$1+2-5+2 = 0.$$

b) Agora precisamos resolver

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1, \\ x_2, \\ x_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_1, \\ x_2, \\ x_3 \end{bmatrix}$$

para o autovetor (x_1, x_2, x_3):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -x_1, \\ x_1 + x_3 &= -x_2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -x_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0; \end{aligned}$$

$$x_1 + x_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3, \\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Um autovetor possível, portanto, é $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -1)$ ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Dadas as funções

$$
\begin{aligned}
f(x,y,u,v) &= x + y + u + v,\\
g(x,y,u,v) &= x^2 + y^2 + u^2 + v^2,
\end{aligned}
$$

calcule o jacobiano $\partial(f,g)/\partial(u,v)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\partial(f,g)/\partial(u,v) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}\\
&= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\\
&= 2v - 2u \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Calcule a área da superfície do parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ que se projeta sobre a região $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ do plano Oxy.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se $z = f(x, y)$, então a fórmula para o cálculo da área da superfície não-plana (em geral) é

$$S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Portanto, $R_{x,y} = \left\{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2 \leq 1}\right\}$ e

$$\begin{aligned} S &= \iint_{R_{x,y}} \sqrt{1 + (2x)^2 + (-2y)^2}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x, \\ &= \iint_{R_{x,y}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x, \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \\ &= \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\pi \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Em um fluido, o campo de velocidade

$$\boldsymbol{u} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - 4z\boldsymbol{k}$$

atravessa região esférica do espaço

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1.$$

Calcule

$$\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}S,$$

onde $\mathscr{S}$ é a superfície da esfera, e $\boldsymbol{n}$ é o vetor unitário normal apontando para fora da superfície em cada ponto de $\mathscr{S}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Usamos o teorema da divergência:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}S &= \int_{\mathscr{V}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u})\ \mathrm{d}V \\
&= \int_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)\ \mathrm{d}V \\
&= \int_{\mathscr{V}} (2 + 2 - 4)\ \mathrm{d}V \\
&= 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Encontre a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 y = x^2.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + x^2 y &= x^2,\\
\underbrace{u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x^2 v\right]}_{=0} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x^2,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x^2 v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -x^2 v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -x^2\mathrm{d}x,\\
\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu} &= \int_0^x -\xi^2\mathrm{d}\xi,\\
\ln\frac{v}{v_0} &= -\frac{1}{3}x^3,\\
v(x) &= v_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}.\\
v_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x^2,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{v_0}x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3},\\
\int_{u_0}^{u}\mathrm{d}v &= \frac{1}{v_0}\int_0^x \xi^2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\xi^3}\,\mathrm{d}\xi,\\
u - u_0 &= \frac{1}{v_0}\left[\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} - 1\right],\\
u &= u_0 + \frac{1}{v_0}\left[\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} - 1\right],\\
y &= \left\{u_0 + \frac{1}{v_0}\left[\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} - 1\right]\right\}v_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}\\
&= u_0 v_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3} + \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}\right]\\
&= [u_0 v_0 - 1]\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3} + 1\\
&= C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3} + 1 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$