TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 16 abr 2025
Prof. Nelson Luís Dias

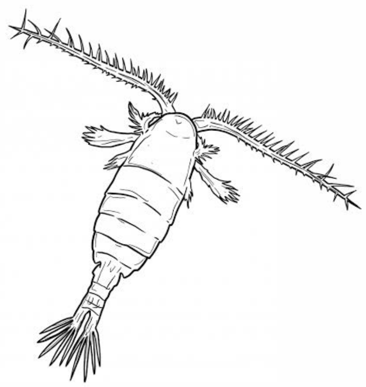
0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

1 [20] (COM CALCULADORA) [White, 2016, Ex 5.1]: A figura ao lado mostra um *copépode*. Copépodes são pequenos crustáceos presentes em quase todos os habitats de água doce ou salgada. Desejamos saber a força de arrasto da água F_p (massa específica $\rho = 998\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, viscosidade cinemática $\nu = 1.0020 \times 10^{-6}\mathrm{m^2\,s^{-1}}$) sobre um copépode com diâmetro de 1 mm ($D_p = 1\,\mathrm{mm}$) e a velocidade correspondente V_p com que ele se movimenta. Para isso, construímos um modelo 100 vezes maior ($D_m = 100\,\mathrm{mm}$) e o testamos com glicerina (massa específica $\rho = 1263\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, viscosidade cinemática $\nu = 1.1876 \times 10^{-3}\mathrm{m^2\,s^{-1}}$) em um canal com velocidade $V_m = 30\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, encontrando uma força de arrasto no modelo $F_m = 1{,}3\,\mathrm{N}$. Usando análise dimensional,



a) [15] Obtenha os dois grupos adimensionais do problema, **utilizando como variáveis comuns ρ, ν, e D.**

b) [5] Igualando os parâmetros adimensionais do modelo e do protótipo, calcule F_p e V_p.

White, F. M. (2016). *Fluid Mechanics*. McGraw Hill Education, New York

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Há 5 variáveis dimensionais, com as seguintes dimensões correspondentes:

ρ	$\mathsf{M\,L^{-3}}$
ν	$\mathsf{L^2\,T^{-1}}$
D	L
V	$\mathsf{L\,T^{-1}}$
F	$\mathsf{M\,L\,T^{-2}}$

Os dois grupos que desejamos podem ser obtidos da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= V\rho^a\nu^bD^c\\
[\![\Pi_1]\!] &= [\![V]\!]\,[\![\rho]\!]^a\,[\![\nu]\!]^b\,[\![D]\!]^c\\
1 &= \mathsf{L\,T^{-1}}[\mathsf{M\,L^{-3}}]^a[\mathsf{L^2\,T^{-1}}]^b[\mathsf{L}]^c\\
&= \mathsf{M}^a\mathsf{L}^{1-3a+2b+c}\mathsf{T}^{-1-b}.
\end{aligned}
$$

Obtemos o sistema

$$
\begin{aligned}
a &= 0,\\
-3a + 2b + c &= -1\\
-b &= 1
\end{aligned}
$$

donde $a = 0$, $b = -1$, $c = 1$ e

$$
\Pi_1 = \frac{VD}{\nu}.
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Observe que Π_1 é o *número de Reynolds*.
Em seguida,

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= F\rho^a \nu^b D^c \\
[\![\Pi_2]\!] &= [\![F]\!]\,[\![\rho]\!]^a\,[\![\nu]\!]^b\,[\![D]\!]^c \\
1 &= \mathsf{M\,L\,T^{-2}}[\mathsf{M\,L^{-3}}]^a[\mathsf{L^2\,T^{-1}}]^b[\mathsf{L}]^c \\
&= \mathsf{M}^{1+a}\mathsf{L}^{1-3a+2b+c}\mathsf{T}^{-2-b}.
\end{aligned}$$

Obtemos o sistema

$$\begin{aligned}
a &= -1, \\
-3a + 2b + c &= -1 \\
-b &= 2
\end{aligned}$$

donde $a = -1$, $b = -2$, $c = 0$ e

$$\Pi_2 = \frac{F}{\rho \nu^2}.$$

No modelo,

$$\begin{aligned}
\rho &= 1263\,\mathrm{kg\,m^{-3}}, \\
\nu &= 1.1876 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}, \\
D &= 0.001\,\mathrm{m}, \\
V &= 0.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\
F &= 1.3\,\mathrm{N},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{0.3 \times 0.1}{1.1876 \times 10^{-3}} = 25.2610, \\
\Pi_2 &= \frac{1.3}{1263 \times (1.1876 \times 10^{-3})^2} = 729.7929.
\end{aligned}$$

No protótipo,

$$\begin{aligned}
\rho &= 998\,\mathrm{kg\,m^{-3}}, \\
\nu &= 1.0020 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}, \\
D &= 0.001\,\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

Agora fazemos esses dois grupos terem os mesmos valores no protótipo (no copépode):

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{V_p \times 0.001}{1.0020 \times 10^{-6}} = 25.2610 \Rightarrow V_p = \frac{25.2610 \times 1.0020 \times 10^{-6}}{0.001} = 0.0253\,\mathrm{m\,s^{-1}}; \\
\Pi_2 &= \frac{F_p}{\rho \nu^2} = \frac{F}{998 \times (1.0020 \times 10^{-6})^2} = 729.7929 \Rightarrow F_p = 729.7924 \times 998 \times (1.0020 \times 10^{-6})^2 = 7.312 \times 10^{-7}\,N \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [20] (SEM CALCULADORA) Utilizando a fórmula de Euler com dois sinais,

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x),\\
e^{-ix} &= \cos(x) - i\,\mathrm{sen}(x),
\end{aligned}
$$

a) [10] obtenha $\mathrm{sen}(x)$ em função de e^{ix} e e^{-ix};

b) [10] use (a) para encontrar uma expressão (puramente real) para $\mathrm{sen}^2(x)$ (**Sugestão:** eleve ao quadrado o lado direito de $\mathrm{sen}(x) = \ldots$ obtido acima).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(x) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right);\\
\mathrm{sen}^2(x) &= \frac{1}{4i^2}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)\\
&= -\frac{1}{4}\left(2\cos(2x) - 2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] (SEM CALCULADORA) Sabemos que o produto escalar de dois vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ do $\mathbb{R}^3$ é dado por

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i,$$

onde u_i e v_i são os *elementos* de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Considere agora uma base $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ **não ortonormal**, ou seja,

$$G_{ij} \equiv (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) \neq \delta_{ij}.$$

Nessa base,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= u_{Ei}\boldsymbol{e}_i, \\ \boldsymbol{v} &= v_{Ej}\boldsymbol{e}_j, \end{aligned}$$

onde u_{Ei} e v_{Ej} são as **coordenadas** de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ na base E. Utilizando as expressões acima, **e usando obrigatoriamente notação indicial**, calcule $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ em termos de u_{Ei}, v_{Ej} e G_{ij}.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= u_{Ei}\boldsymbol{e}_i \cdot v_{Ej}\boldsymbol{e}_j \\ &= u_{Ei}v_{Ej}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) \\ &= u_{Ei}G_{ij}v_{Ej}. \end{aligned}$$

Note que podemos escrever matricialmente

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{u}]_E^\top [G][v]_E \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] (SEM CALCULADORA) Seja $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ uma base não-ortonormal do $\mathbb{R}^3$, com

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= (1, 2, 1),\\
\boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, 2),\\
\boldsymbol{e}_3 &= (1, 0, 1).
\end{aligned}
$$

Obtenha uma base ortonormal a partir de E utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmmidt.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \boldsymbol{e}_1;\\
\boldsymbol{g}_1 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_1|}\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1);\\
\boldsymbol{f}_2 &= \boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{g}_1)\boldsymbol{g}_1\\
&= (-2/3, -1/3, 4/3);\\
\boldsymbol{g}_2 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_2|}\boldsymbol{f}_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}(-2/3, -1/3, 4/3) = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2, -1, 4);\\
\boldsymbol{f}_3 &= \boldsymbol{e}_3 - (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{g}_1)\boldsymbol{g}_1 - (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{g}_2)\boldsymbol{g}_2\\
&= (6/7, -4/7, 2/7)\\
\boldsymbol{g}_3 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_3|}\boldsymbol{f}_3 = \frac{\sqrt{7}}{2^{3/2}}(6/7, -4/7, 2/7) = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -2, 1) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] (SEM CALCULADORA) Usando a base canônica $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$, escreva em notação indicial (ou seja: escreva em termos dos elementos u_i, v_j, etc.)

$$([\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]) \cdot \boldsymbol{c}$$

e simplifique **ao máximo**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k;\\
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \epsilon_{lmn} a_l b_m \boldsymbol{e}_n;\\
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k \times \epsilon_{lmn} a_l b_m \boldsymbol{e}_n\\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \epsilon_{lmn} a_l b_m \boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_n\\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \epsilon_{lmn} a_l b_m \epsilon_{knp} \boldsymbol{e}_p\\
&= \epsilon_{knp} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m \boldsymbol{e}_p;\\
([\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]) \cdot \boldsymbol{c} &= \epsilon_{knp} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m \boldsymbol{e}_p \cdot c_q \boldsymbol{e}_q\\
&= \epsilon_{knp} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m c_q (\boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{e}_q)\\
&= \epsilon_{knp} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m c_q \delta_{pq}\\
&= \epsilon_{knp} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m c_p\\
&= \epsilon_{npk} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m c_p\\
&= \left[\delta_{ni}\delta_{pj} - \delta_{nj}\delta_{pi}\right] \epsilon_{lmn} u_i v_j a_l b_m c_p\\
&= \epsilon_{lmi} u_i v_j a_l b_m c_j - \epsilon_{lmj} u_i v_j a_l b_m c_i\\
&= \epsilon_{lmi} a_l b_m u_i (v_j c_j) - \epsilon_{lmj} a_l b_m v_j (u_i c_i)\\
&= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{c}) - \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v})(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{c}) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹