TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 07 jul 2025
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Verifique se os vetores

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (1, 0, 0),\\
\boldsymbol{v}_2 &= (1, 2, 0),\\
\boldsymbol{v}_3 &= (1, 2, 3),
\end{aligned}
$$

são linearmente independentes ou dependentes. Você precisa **justificar matematicamente** sua resposta.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Formalmente, os 3 vetores são LI quando

$$
\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \iff \alpha_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3,
$$

e LD em caso contrário. Então,

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(1,2,0) + \alpha_3(1,2,3) &= (0,0,0);\\
1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 &= 0,\\
2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0,\\
3\alpha_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

O sistema acima possui solução única $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$; portanto, os 3 vetores são LI ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Em uma base ortonormal $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$,

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{b} = b_j \boldsymbol{e}_j, \qquad \boldsymbol{c} = c_k \boldsymbol{e}_k.$$

Exprima $[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c}$ em notação indicial usando, **se necessário**, o símbolo de permutação e o delta de Kronecker.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c} &= [\epsilon_{ijk} a_i b_j \boldsymbol{e}_k] \cdot c_l \boldsymbol{e}_l \\
&= \epsilon_{ijk} a_i b_j c_l (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) \\
&= \epsilon_{ijk} a_i b_j c_l \delta_{kl} \\
&= \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Calcule o volume da região $\mathscr{C}$ delimitada *inferiormente* pelo parabolóide de revolução $z = 5(x^2+y^2)$ e *superiormente* pelo plano $z = 5$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A projeção do sólido no plano xy é $x^2 + y^2 \le 1$. O volume desejado é

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_{(x^2+y^2)\le 1} [5 - 5(x^2+y^2)]\, dx dy \\
&= 5 \iint_{(x^2+y^2)\le 1} [1 - (x^2+y^2)]\, dx dy \\
&= 5 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} [1 - r^2]\, r dr\, d\theta \\
&= 10\pi \int_{r=0}^{1} [1 - r^2]\, r dr \\
&= \frac{5}{2}\pi \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: A equação homogênea associada,

$$\frac{\mathrm{d}^2y_h}{\mathrm{d}x^2} + y_h = 0,$$

possui solução

$$y_h(x) = A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x).$$

Usamos o método de variação de constantes; com $A = A(x)$ e $B = B(x)$, fazemos

$$\begin{aligned}
y &= A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x),\\
y' &= A'\cos(x) + B'\,\mathrm{sen}(x) - A\,\mathrm{sen}(x) + B\cos(x),\\
0 &= A'\cos(x) + B'\,\mathrm{sen}(x),\\
y'' &= -A'\,\mathrm{sen}(x) + B'\cos(x) - A\cos(x) - B\,\mathrm{sen}(x).
\end{aligned}$$

Substituindo na EDO, temos

$$\begin{aligned}
-A'\,\mathrm{sen}(x) + B'\cos(x) - A\cos(x) - B\,\mathrm{sen}(x) + A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x) &= x,\\
-A'\,\mathrm{sen}(x) + B'\cos(x) &= x.
\end{aligned}$$

Reunido as duas equações de ordem 1 em A e B:

$$\begin{aligned}
A'\cos(x) + B'\,\mathrm{sen}(x) &= 0,\\
-A'\,\mathrm{sen}(x) + B'\cos(x) &= x.
\end{aligned}$$

Para obter A, multiplicamos a primeira equação acima por $\cos(x)$, a segunda por $\mathrm{sen}(x)$, e subtraímos:

$$\begin{aligned}
A'\cos^2(x) + B'\,\mathrm{sen}(x)\cos(x) &= 0,\\
-A'\,\mathrm{sen}^2(x) + B'\,\mathrm{sen}(x)\cos(x) &= x\,\mathrm{sen}(x),\\
A'\left[\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x)\right] &= -x\,\mathrm{sen}(x),
\end{aligned}$$

e integramos por partes:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -x\,\mathrm{sen}(x) = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-\,\mathrm{sen}(x))}_{\mathrm{d}v},\\
u &= x,\\
\mathrm{d}u &= \mathrm{d}x,\\
\mathrm{d}v &= -\,\mathrm{sen}(x),\\
v &= \cos(x);\\
A(x) &= \int -x\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x = x\cos(x) - \int \cos(x)\,\mathrm{d}x\\
&= x\cos(x) - \mathrm{sen}(x) + A_0.
\end{aligned}$$

Para obter B, multiplicamos a primeira equação por $\mathrm{sen}(x)$, a segunda por $\cos(x)$, e somamos:

$$\begin{aligned}
A'\cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + B'\,\mathrm{sen}^2(x) &= 0,\\
-A'\,\mathrm{sen}(x)\cos(x) + B'\cos^2(x) &= x\cos(x),\\
B'\left[\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x)\right] &= x\cos(x).
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Integramos esta última por partes:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos(x)}_{\mathrm{d}v}.\\
u &= x,\\
\mathrm{d}u &= \mathrm{d}x,\\
\mathrm{d}v &= \cos(x),\\
v &= \operatorname{sen}(x);\\
B(x) &= \int x\cos(x) = x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + B_0
\end{aligned}
$$

Portanto,

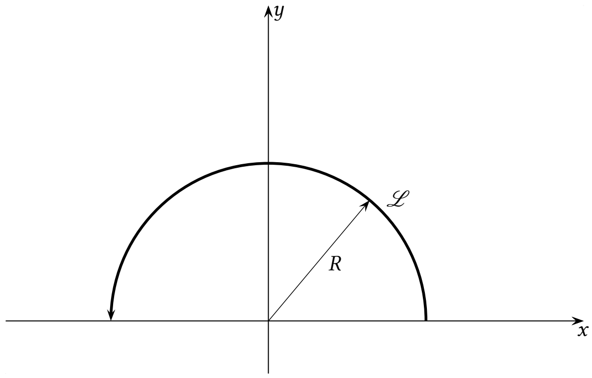
$$
\begin{aligned}
y(x) &= [x\cos(x) - \operatorname{sen}(x) + A_0]\cos(x) + [x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + B_0]\operatorname{sen}(x)\\
&= x\cos^2(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x) + A_0\cos(x) + x\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x) + B_0\operatorname{sen}(x)\\
&= A_0\cos(x) + B_0\operatorname{sen}(x) + x \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Seja $\mathscr{L}$ a semi-circunferência de raio R do plano complexo tal que a parte imaginária de z é maior que ou igual a zero: $\operatorname{Im} z \geq 0$; calcule

$$\int_{\mathscr{L}} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Sugestão: sobre a semi-circunferência, $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Substitua na integral, e integre de $\theta = 0$ até $\theta = \pi$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se

$$z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\pi \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$