TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 27 set 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Utilizando a fórmula usual para a derivada numérica de ordem 2,

$$\frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} = \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2),$$

discretize o problema de valor de contorno

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = 0, \qquad \phi(0) = 1, \qquad \phi(1) = 2,$$

para $x \in [0, 1]$ com

$$\Delta x = 1/4, \qquad x_i = i\Delta x,\ i = 0, \ldots, 4.$$

O resultado é um sistema de 3 equações nas incógnitas ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 (note que $\phi_0 = 1$ e $\phi_4 = 2$ são conhecidos) com a forma

$$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{\phi}] = [\boldsymbol{b}].$$

Obtenha as matrizes $[\boldsymbol{A}]_{3\times3}$ e $[\boldsymbol{b}]_{3\times1}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} = \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} &= 0,\\
\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1} &= 0;\\
\phi_0 - 2\phi_1 + \phi_2 &= 0;\\
\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3 &= 0;\\
\phi_2 - 2\phi_3 + \phi_4 &= 0.
\end{aligned}$$

mas $\phi_0 = 1$, $\phi_4 = 2$:

$$\begin{aligned}
-2\phi_1 + \phi_2 &= -1;\\
\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3 &= 0;\\
\phi_2 - 2\phi_3 \quad &= -2.
\end{aligned}$$

Donde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} \phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ -2 \end{bmatrix}}_{[b]} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] **Um esquema regressivo (*upwind*) de ordem 2.** Expanda em série de Taylor $u(x,t)$ desde x_i até x_{i-1} e x_{i-2} (igualmente espaçados), elimine $\partial^2 u/\partial x^2$ e encontre uma aproximação de diferenças finitas para $\partial u/\partial x|_{x_i}$ cujo erro é $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. **Nota**: a expansão de série de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de x_0 é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
u_{i-1} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i \Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i \frac{\Delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x^3),\\
u_{i-2} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 2\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i \frac{(2\Delta x)^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x^3).
\end{aligned}$$

Para eliminar $\partial^2 u/\partial x^2$, multiplicamos a primeira equação acima por 4, e subtraímos:

$$\begin{aligned}
4u_{i-1} &= 4u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 4\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i 2\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3),\\
u_{i-2} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 2\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i 2\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3),\\
4u_{i-1} - u_{i-2} &= 3u_i - 2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^3);\\
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i &= \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Faça a análise de estabilidade para o esquema explícito que tenta resolver a equação da onda cinemática:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\epsilon_i^{n+1} &= \epsilon_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}(\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n),\\
t_n &= n\Delta t,\\
x_i &= i\Delta x,\\
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right);
\end{aligned}$$

eliminando o fator comum $\xi_l \mathrm{e}^{at_n+\mathrm{i}k_l i\Delta x}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)\\
&= 1 - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}\,k_l\Delta x.
\end{aligned}$$

Mas $|\mathrm{e}^{a\Delta t}| > 1,\ \forall \mathrm{Co}$, e o esquema é incondicionalmente instável ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Calcule

$$\mathscr{L}\left\{\cosh(at)\right\}$$

obrigatoriamente a partir de

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\cosh(at)\right\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+a+s-a}{s^2-a^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-a^2} \\
&= \frac{s}{s^2-a^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Sabendo que

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

resolva a equação diferencial

$$y'' + y = t, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'' + y\} &= \mathscr{L}\{t\} \\
s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0) + \overline{y} &= \frac{1}{s^2}, \\
s^2\overline{y} - s - 1 + \overline{y} &= \frac{1}{s^2}, \\
\overline{y}(s^2+1) - (s+1) &= \frac{1}{s^2}, \\
\overline{y}(s^2+1) &= (s+1) + \frac{1}{s^2} = \frac{s^3+s^2+1}{s^2}, \\
\overline{y} &= \frac{s^3+s^2+1}{s^2(s^2+1)}, \\
\overline{y} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Resolvendo para as frações parciais,

$$A = 0,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0$$

ou

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2}, \\
y(t) &= \cos(t) + t \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 01 Nov 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Utilizando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz, é possível mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-|x|}}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \le \alpha,$$

onde α é um número real positivo. Encontre α. Note que

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arctg}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A desigualdade de Cauchy-Schwarz é

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\|g\|$$

Admitindo-se que f e g sejam reais e integráveis de $-\infty$ a $+\infty$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz fica

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} [g(x)]^2\,\mathrm{d}x}\,.$$

Agora basta escolher

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$g(x) = \sqrt{e^{-|x|}}\,:$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-|x|}}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &\le \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x}\\
&= \sqrt{4\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}\\
&= \sqrt{4\times\frac{\pi}{2}\times 1}\\
&= \sqrt{2\pi}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Obtenha a série de Fourier **trigonométrica** de $f(x) = 1,\ -\pi \le x \le +\pi$. **Justifique.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A resposta curta é: a série de Fourier de 1 é 1! A resposta um pouco mais longa é: a série de Fourier é

$$f(x) = 1 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx \right].$$

Compare: como 1 é par e os senos são ímpares, $B_n = 0, \forall n$; A_0 é necessariamente igual a 2, e todos os outros $A_n s$ são nulos:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x = 0, \forall n > 0.$$

Fim da questão ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Para a função $f(x) = 2 - x,\ 0 \le x \le 2$, obtenha a série de Fourier de sua extensão ímpar em $[-2, +2]$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Seja $f_I(x)$ a extensão ímpar de $f(x)$, definida por

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \ge 2, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -2 \le x < 0. \end{cases}$$

A série de Fourier de $f_I(x)$ contém apenas senos:

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{L}$$

onde $L = 4$, e

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{L}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{2} f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mas $f(x) = 2 - x$, e portanto

$$B_n = \int_0^2 (2 - x) \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2}\, \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi n}.$$

Portanto, a série de fourier da extensão ímpar de $f(x)$ é

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20]

a) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Calcule $\widehat{f}(k)$.

b) Usando o resultado de a) e escrevendo $f(0)$ em função de $\widehat{f}(k)$, calcule

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}\,\mathrm{d}k.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O cálculo de $\widehat{f}(k)$ é quase imediato:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}k}\left[-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_{x=-1}^{x=+1} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}k}\left[2\mathrm{i}\operatorname{sen}(k)\right] \\
&= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}.
\end{aligned}$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
f(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\,\mathrm{d}k \\
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\,\mathrm{d}k \\
1 &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\,\mathrm{d}k \qquad \text{(pois o integrando é uma função par)} \\
\frac{\pi}{2} &= \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}\,\mathrm{d}k \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Resolva *parcialmente* a equação da difusão-advecção

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = a^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

sujeita apenas à condição inicial de um lançamento instantâneo de massa M em uma seção transversal de área A:

$$C(x,0) = \frac{M}{A}\delta(x),$$

onde $\delta(x)$ é a distribuição Delta de Dirac:

a) [10] Calcule a transformada de Fourier da equação diferencial parcial,

$$\widehat{C}(k,t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(x,t)\exp(-\mathrm{i}kx)\,dx,$$

e obtenha uma equação diferencial ordinária de $\widehat{C}$ em t.

b) [10] Faça a transformada de Fourier de $C(x,0)$, e obtenha $\widehat{C}(k,0)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) A transformada de Fourier da equação diferencial é

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{C}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}ku\widehat{C} = -a^2k^2\widehat{C}$$
$$\frac{\mathrm{d}\widehat{C}}{\mathrm{d}t} + \left(\mathrm{i}ku + a^2k^2\right)\widehat{C} = 0 \blacksquare$$

Note que, de acordo com o enunciado, não era necessário fazer mais nada neste item.
b) A transformada de Fourier da condição inicial é

$$\begin{aligned}\widehat{C}(k,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\frac{M}{A}\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,dx\\ &= \frac{M}{2A\pi} \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 11 Dez 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Sabendo que

$$
\begin{aligned}
f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \qquad &\leftrightarrow \qquad \widehat{f}(k) = \frac{1}{\pi(1+k^2)},\\
g(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \qquad &\leftrightarrow \qquad \widehat{g}(k) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}},
\end{aligned}
$$

são pares de transformadas de Fourier, calcule

$$
\mathscr{F}\left\{\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{e}^{-|x-\xi|}\,\mathrm{d}\xi\right\}.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A expressão acima é a transformada de Fourier da convolução $[f * g](x)$; pelo Teorema da Convolução,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{[f*g](x)\right\} &= 2\pi\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)\\
&= 2\pi\frac{1}{\pi(1+k^2)}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}},\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+k^2)}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Utilizando o Teorema de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(-k)\widehat{g}(k)\,\mathrm{d}k,$$

e sabendo que

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}}}{1+k^2}\,\mathrm{d}k = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}}\,\pi\,\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\right),$$

Obtenha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Obs: para os pares de transformadas, use o enunciado da questão 1.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{-|x|} &\quad\leftrightarrow\quad& \widehat{f}(k) = \frac{1}{\pi(1+k^2)}, \\ g(x) &= \mathrm{e}^{-x^2} &\quad\leftrightarrow\quad& \widehat{g}(k) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}}, \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+k^2)}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}}\,\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}}}{1+k^2}\,\mathrm{d}k \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}}}{1+k^2}\,\mathrm{d}k \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}}\,\pi\,\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt[4]{\mathrm{e}}\,\sqrt{\pi}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\right) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Obtenha a função de Green da equação diferencial

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy &= f(x),\\
y(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + \xi y &= f(\xi),\\
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + G(x,\xi)\xi y &= G(x,\xi)f(\xi),\\
\int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\xi y\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \int_{\xi=0}^{\infty} y\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\xi y\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\\
G(x,\infty)y(\infty) + \int_{\xi=0}^{\infty}\left[-\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \xi G(x,\xi)\right]y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

Impomos

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
-\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \xi G(x,\xi) &= \delta(\xi - x),
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

e resolvemos para G:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= u(x,\xi)v(x,\xi),\\
-\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}\xi} + \xi uv &= \delta(\xi - x),\\
u\left[-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + \xi v\right] - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x),\\
-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} &= -\xi v\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \xi \mathrm{d}\xi\\
\int_{v(x,0)}^{v(x,\xi)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_{\eta=0}^{\xi} \eta \mathrm{d}\eta\\
\ln\left(\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)}\right) &= \frac{1}{2}\xi^2\\
v(x,\xi) &= v(x,0)\exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right);\\
-v(x,0)\exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x),\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{1}{v(x,0)}\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right)\delta(\xi - x),\\
\mathrm{d}u &= -\frac{1}{v(x,0)}\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right)\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta,\\
u(x,\xi) - u(x,0) &= -\frac{1}{v(x,0)}\int_{\eta=0}^{\xi}\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right)\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta\\
&= -\frac{1}{v(x,0)}H(\xi - x)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),\\
u(x,\xi) &= u(x,0) - \frac{1}{v(x,0)}H(\xi - x)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),\\
G(x,\xi) &= \left[u(x,0) - \frac{1}{v(x,0)}H(\xi - x)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right]v(x,0)\exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right);\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)\left[G(x,0) - H(\xi - x)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right].
\end{aligned}
$$

Para impor a condição de contorno,

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
G(x,0) - H(\infty - x)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) &= 0,\\
G(x,0) - \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) &= 0,\\
G(x,0) &= \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
G(x,\xi) = [1 - H(\xi - x)]\exp\left(\frac{1}{2}\left(\xi^2 - x^2\right)\right) \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Encontre os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$y'' + 4y' + (4 - 9\lambda)y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se $\lambda = k^2 > 0, \qquad k > 0,$

$$\begin{aligned} r^2 + 4r + (4 - 9k^2) &= 0, \\ r &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(4 - 9k^2)}}{2}, \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{36k^2}}{2} \\ &= -2 \pm 3k. \end{aligned}$$

Neste caso a solução geral é

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp(-2x)\left[A\cosh(3kx) + B\,\mathrm{senh}(3kx)\right], \\ y(0) &= A = 0, \\ y(1) &= \exp(-2)B\,\mathrm{senh}(3k) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda > 0$ não é autovalor.
Se $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} r^2 + 4r + 4 &= 0, \\ r &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = -2. \end{aligned}$$

Só há uma raiz, e a solução geral agora é

$$\begin{aligned} y(x) &= (A + Bx)\mathrm{e}^{-2x}, \\ y(0) &= A = 0, \\ y(1) &= B\mathrm{e}^{-2} = 0 \;\Rightarrow\; B = 0, \end{aligned}$$

e novamente $\lambda = 0$ não é autovalor.
Se $\lambda = -k^2 < 0, \qquad k > 0,$

$$\begin{aligned} r^2 + 4r + (4 + 9k^2) &= 0, \\ r &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(4 + 9k^2)}}{2}, \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-36k^2}}{2}, \\ &= -2 \pm 3k\mathrm{i}. \end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{-2x}\left[A\cos(3kx) + B\,\mathrm{sen}(3kx)\right], \\ y(0) &= A = 0, \\ y(1) &= \mathrm{e}^{-2}B\,\mathrm{sen}(3kx) = 0; \\ \mathrm{sen}(3k) &= 0, \\ 3k_n &= n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ k_n &= \frac{n\pi}{3}, \\ y_n(x) &= \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{sen}\,(n\pi x), \\ \lambda_n &= -\frac{n^2\pi^2}{9} \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \qquad \phi(0,t) = 0, \qquad \phi(1,t) = 1, \qquad \phi(x,0) = 0.$$

Sugestão: As condições de contorno em ϕ não são homogêneas! Faça $\phi(x,t) = u(x,t) + x$. Obtenha a EDP correspondente em u com condições de contorno homogêneas. Resolva para $u(x,t)$ utilizando o método de separação de variáveis.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= u(x,t) + x,\\
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t},\\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + 1,\\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

A equação diferencial em u não muda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

As condições de contorno correspondentes são

$$\begin{aligned}
u(0,t) &= \phi(0,t) - 0 = 0 - 0 = 0,\\
u(1,t) &= \phi(1,t) - 1 = 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

A condição inicial é

$$u(x,0) = \phi(x,0) - x = -x.$$

Temos portanto condições de contorno homogêneas e prosseguimos.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t),\\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 T \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2},\\
\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda.
\end{aligned}$$

A solução em termos de autofunções e autovalores é

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= -n^2\pi^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\\
X_n(x) &= \mathrm{sen}(n\pi x).
\end{aligned}$$

Procuramos portanto

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= -x,\\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2\alpha^2 t}\,\mathrm{sen}(n\pi x),\\
-x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}(n\pi x),\\
-x\,\mathrm{sen}(m\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}(m\pi x)\,\mathrm{sen}(n\pi x)\\
-\int_0^1 x\,\mathrm{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 A_n\,\mathrm{sen}(m\pi x)\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x\\
-\int_0^1 x\,\mathrm{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 A_m\,\mathrm{sen}^2(m\pi x)\,\mathrm{d}x = A_m\frac{1}{2},\\
\frac{(-1)^m}{m\pi} &= A_m\frac{1}{2},\\
A_m &= 2\frac{(-1)^m}{m\pi} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 20 Dez 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] **Sem utilizar frações parciais**, encontre a transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-3)(s^2+1)}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A expressão acima é o produto de duas transformadas de Laplace conhecidas:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\mathrm{e}^{3t}\right\} &= \frac{1}{s-3},\\ \mathscr{L}\left\{\cos(t)\right\} &= \frac{s}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convolução,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{[f*g](t)\right\} &= \overline{f}(s)\overline{g}(s),\\
&= \frac{1}{s-3}\times\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow\\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-3)(s^2+1)}\right\} &= \mathrm{e}^{3t} * \cos(t)\\
&= \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{3(t-\tau)}\cos(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{3t}\int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{-3\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] = \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{3t}\int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-3)\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{3t}\frac{1}{\mathrm{i}-3}\int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-3)\tau}\,\mathrm{d}(\mathrm{i}-3)\tau\right]\\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{\mathrm{e}^{3t}}{\mathrm{i}-3}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-3)\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\mathrm{e}^{3t}}{\mathrm{i}-3}\left[\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-3)t}-1\right]\right\}\\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\mathrm{i}-3}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{3t}\right]\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{-\mathrm{i}-3}{10}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{3t}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{10}\operatorname{Re}\left\{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{3t}-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+3\mathrm{e}^{3t}\right\}\\
&= \frac{1}{10}\left[\operatorname{sen}(t)+0-3\cos(t)+3\mathrm{e}^{3t}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Obtenha

$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} \underbrace{H(\xi - a)}_{u}\,\underbrace{\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{\mathrm{d}v} &= H(\xi - a)\,\mathrm{sen}(\xi)\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} \mathrm{sen}(\xi)\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi \\
&= H(x-a)\,\mathrm{sen}(x) - H(x-a)\,\mathrm{sen}(a) \\
&= H(x-a)[\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(a)] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Aplique a desigualdade de Schwarz para dois vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ do $\mathbb{R}^3$ tais que

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= (x, y, z), \qquad \text{onde} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1,\\
\boldsymbol{v} &= (1, 2, 3),
\end{aligned}
$$

utilizando o produto escalar padrão. **Simplifique ao máximo.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 &\le (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})\\
(x + 2y + 3z)^2 &\le (x^2 + y^2 + z^2)(1 + 4 + 9)\\
(x + 2y + 3z)^2 &\le 14 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Obtenha a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad 0 \le x \le 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2ni\pi x}{L}};\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2ni\pi x}{L}} f(x)\,\mathrm{d}x;\\
a &= 0,\\
b &= 1,\\
L &= b - a = 1;\\
c_n &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-2ni\pi x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{(\mathrm{e}-1)(2\mathrm{i}\pi n - 1)}{4\pi^2 n^2 + 1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Obtenha a função de Green da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - x^2 y = f(x), \qquad y(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - \xi^2 y &= f(\xi),\\
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - G(x,\xi)\xi^2 y &= G(x,\xi)f(\xi),\\
\int_0^\infty G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)\xi^2 y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\\
[G(x,\xi)y(\xi)]_0^\infty - \int_0^\infty y\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} - \int_0^\infty G(x,\xi)\xi^2 y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\\
[G(x,\infty)y(\infty) - G(x,0)y(0)] - \int_0^\infty y\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} - \int_0^\infty G(x,\xi)\xi^2 y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

faça

$$\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0; \Longrightarrow\\
-G(x,0) + \int_{\xi=0}^\infty\left[-\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} - \xi^2 G(x,\xi)\right]y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

A equação diferencial em G é

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} - \xi^2 G(x,\xi)y(\xi) &= \delta(\xi - x),\\
\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \xi^2 G(x,\xi)y(\xi) &= -\delta(\xi - x),\\
G(x,\xi) &= u(x,\xi)v(x,\xi),\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \xi^2 uv &= -\delta(\xi - x),\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + \xi^2 v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\delta(\xi - x),\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\xi^2\,\mathrm{d}\xi,\\
\int_{v(x,0)}^{v(x,\xi)}\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\int_{\eta=0}^{\xi}\eta^2\,\mathrm{d}\eta\\
\ln\left(\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)}\right) &= -\frac{\xi^3}{3}\\
v(x,\xi) &= v(x,0)\exp\left(-\frac{\xi^3}{3}\right);\\
v(x,0)\exp\left(-\frac{\xi^3}{3}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\delta(\xi - x),\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta} &= -\frac{1}{v(x,0)}\exp\left(\frac{\eta^3}{3}\right)\delta(\eta - x),\\
\int_{u(x,0)}^{u(x,\xi)}\mathrm{d}u &= -\int_{\eta=0}^{\xi}\frac{1}{v(x,0)}\exp\left(\frac{\eta^3}{3}\right)\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta,\\
u(x,\xi) &= u(x,0) - \frac{1}{v(x,0)}H(\xi - x)\exp\left(\frac{x^3}{3}\right).
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Obtemos, para $G(x,\xi)$,

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= u(x,\xi)v(x,\xi)\\
&= \left[u(x,0) - \frac{1}{v(x,0)}H(\xi - x)\exp\left(\frac{x^3}{3}\right)\right] v(x,0)\exp\left(-\frac{\xi^3}{3}\right)\\
&= G(x,0)\exp\left(-\frac{\xi^3}{3}\right) - H(\xi-x)\exp\left(\frac{x^3}{3}\right)\exp\left(-\frac{\xi^3}{3}\right)\\
&= \exp\left(-\frac{\xi^3}{3}\right)\left[G(x,0) - H(\xi-x)\exp\left(\frac{x^3}{3}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
G(x,0) - \exp\left(\frac{x^3}{3}\right) &= 0,\\
G(x,0) &= \exp\left(\frac{x^3}{3}\right);
\end{aligned}
$$

finalmente,

$$
G(x,\xi) = [1 - H(\xi - x)]\exp\left(\frac{x^3}{3}\right)\exp\left(-\frac{\xi^3}{3}\right) \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
S, 13 Dez 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} - \mathrm{i}(\phi - 1),$$

com $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, onde τ e ζ são quantidades adimensionais *reais* e ϕ é complexo. Discretize a equação utilizando um esquema totalmente implícito para $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2}$ e ϕ, e obtenha uma equação na forma

$$A\phi_{i+1}^{n+1} + B\phi_i^{n+1} + C\phi_{i-1}^{n+1} = \phi_i^n + D.$$

Obtenha cada um dos A, B, C e D em função de $\mathrm{Fo} = \Delta\tau/\Delta\zeta^2$ e/ou $\mathrm{Cr} = \Delta\tau$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Discretiza-se em ζ: $i = 0, 1, \ldots, M$.

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta\tau} = \frac{1}{2}\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta\zeta^2} - \mathrm{i}(\phi_i^{n+1} - 1)$$

$$\phi_i^{n+1} - \phi_i^n = \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left[\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}\right] - \mathrm{iCr}(\phi_i^{n+1} - 1).$$

Passando todos os termos em $(n+1)$ para o lado esquerdo, e todos os termos em n para o lado direito, tem-se

$$\underbrace{-\frac{\mathrm{Fo}}{2}}_{A}\phi_{i+1}^{n+1} + \underbrace{(1 + \mathrm{iCr} + \mathrm{Fo})}_{B}\phi_i^{n+1} \underbrace{-\frac{\mathrm{Fo}}{2}}_{C}\phi_{i-1}^{n+1} = \phi_i^n + \underbrace{\mathrm{iCr}}_{D} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, resolva o problema de valor inicial

$$3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 6\mathrm{e}^{2t}, \qquad x(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$\begin{aligned} 3s\overline{x} + \overline{x} &= \frac{6}{s-2}, \\ \overline{x}(3s+1) &= \frac{6}{s-2}, \\ \overline{x} &= \frac{6}{3(s-2)(s+1/3)} = \frac{2}{(s-2)(s+1/3)}. \end{aligned}$$

Separando em frações parciais,

$$\begin{gathered} \frac{2}{(s-2)(s+1/3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1/3}, \\ A = 6/7, \\ B = -6/7. \end{gathered}$$

Invertendo,

$$\begin{aligned} \overline{x}(s) &= \frac{6/7}{s-2} - \frac{6/7}{s+1/3}, \\ x(t) &= \frac{6}{7}\mathrm{e}^{2t} - \frac{6}{7}\mathrm{e}^{-t/3}. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Se $\mathbb{V} = \mathbb{C}^3$ (ou seja: se $\mathbb{V}$ é o conjunto das triplas de números complexos (x_1, x_2, x_3)), defina

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3).$$

Sejam agora $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{V}$ e defina

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \equiv \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (y_i - \overline{y}).$$

Verifique se $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ é um produto interno legítimo

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

(i)

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (y_i - \overline{y}) = \left[\sum_{i=1}^{3} (y_i - \overline{y})^* (x_i - \overline{x}) \right]^* = [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]^*. \qquad \checkmark$$

(ii)

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + z] &= \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* ((y_i + z_i) - (\overline{y} + \overline{z})) \\
&= \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (y_i - \overline{y}) + \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (z_i - \overline{z}) \\
&= [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] + [\boldsymbol{x}, z]. \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}] &= \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (\alpha y_i - \alpha \overline{y}) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (y_i - \overline{y}) = \alpha [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]. \qquad \checkmark.
\end{aligned}$$

Considere entretanto $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1) \neq \boldsymbol{0}$; então $\overline{x} = 1$ e

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{3} (1 - 1)^* (1 - 1) = 0;$$

existe portanto um vetor $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ tal que $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] = 0$ e, portanto, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ não é um produto interno legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Obtenha a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = x + \mathrm{i}, \qquad -\pi \le x \le \pi, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2n\mathrm{i}\pi x}{L}};\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2n\mathrm{i}\pi x}{L}} f(x)\,\mathrm{d}x;\\
a &= -\pi,\\
b &= +\pi,\\
L &= b - a = 2\pi;\\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-\frac{2n\mathrm{i}\pi x}{2\pi}}\,[x+\mathrm{i}]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}[x+\mathrm{i}]\,\mathrm{d}x;\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(nx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(nx)]\,[x+\mathrm{i}]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x\right\};\\
\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= 0,\\
\int_{-\pi}^{+\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{2\pi(-1)^n}{n},\\
c_n &= \frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\times -\frac{2\pi(-1)^n}{n} = \mathrm{i}\frac{(-1)^n}{n}, \qquad n \neq 0.
\end{aligned}$$

O cálculo de c_0 precisa ser feito separadamente:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[x+\mathrm{i}]\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}.$$

Portanto,

$$(x+\mathrm{i}) = \mathrm{i}\left[1 + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Utilizando obrigatoriamente o método de separação de variáveis, $\phi(x,t) = X(x)T(t)$, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \qquad \phi(0,t) = 0, \qquad \phi(1,t) = 0, \qquad \phi(x,0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= X(x)T(t), \\ X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 T \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}, \\ \frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda. \end{aligned}$$

A solução em termos de autofunções e autovalores é

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -n^2\pi^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ X_n(x) &= \operatorname{sen}(n\pi x). \end{aligned}$$

Procuramos portanto

$$\begin{aligned} \phi(x,0) &= 1, \\ \phi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x), \\ 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x), \\ 1 \operatorname{sen}(m\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(m\pi x) \operatorname{sen}(n\pi x) \\ \int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 A_n \operatorname{sen}(m\pi x) \operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ \int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 A_m \operatorname{sen}^2(m\pi x)\,\mathrm{d}x = A_m \frac{1}{2}, \\ \frac{1-(-1)^m}{m\pi} &= A_m \frac{1}{2}, \\ A_m &= \frac{2(1-(-1)^m)}{m\pi}. \end{aligned}$$

Note que $A_m = 0$ se m é par. Apenas os valores ímpares sobrevivem. Redefina portanto

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{(2n-1)\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \\ \phi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{e}^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t} \operatorname{sen}((2n-1)\pi x) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$