TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
S, 13 Dez 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} - \mathrm{i}(\phi - 1),$$

com $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, onde τ e ζ são quantidades adimensionais *reais* e ϕ é complexo. Discretize a equação utilizando um esquema totalmente implícito para $\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2}$ e ϕ, e obtenha uma equação na forma

$$A\phi_{i+1}^{n+1} + B\phi_i^{n+1} + C\phi_{i-1}^{n+1} = \phi_i^n + D.$$

Obtenha cada um dos A, B, C e D em função de $\mathrm{Fo} = \Delta\tau/\Delta\zeta^2$ e/ou $\mathrm{Cr} = \Delta\tau$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Discretiza-se em ζ: $i = 0, 1, \ldots, M$.

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta\tau} &= \frac{1}{2}\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta\zeta^2} - \mathrm{i}(\phi_i^{n+1} - 1)\\
\phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left[\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}\right] - \mathrm{iCr}(\phi_i^{n+1} - 1).
\end{aligned}$$

Passando todos os termos em $(n+1)$ para o lado esquerdo, e todos os termos em n para o lado direito, tem-se

$$\underbrace{-\frac{\mathrm{Fo}}{2}}_{A}\phi_{i+1}^{n+1} + \underbrace{(1 + \mathrm{iCr} + \mathrm{Fo})}_{B}\phi_i^{n+1} \underbrace{-\frac{\mathrm{Fo}}{2}}_{C}\phi_{i-1}^{n+1} = \phi_i^n + \underbrace{\mathrm{iCr}}_{D} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, resolva o problema de valor inicial

$$3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 6\mathrm{e}^{2t}, \qquad x(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
3s\overline{x} + \overline{x} &= \frac{6}{s-2},\\
\overline{x}(3s+1) &= \frac{6}{s-2},\\
\overline{x} &= \frac{6}{3(s-2)(s+1/3)} = \frac{2}{(s-2)(s+1/3)}.
\end{aligned}$$

Separando em frações parciais,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(s-2)(s+1/3)} &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1/3},\\
A &= 6/7,\\
B &= -6/7.
\end{aligned}$$

Invertendo,

$$\begin{aligned}
\overline{x}(s) &= \frac{6/7}{s-2} - \frac{6/7}{s+1/3},\\
x(t) &= \frac{6}{7}\mathrm{e}^{2t} - \frac{6}{7}\mathrm{e}^{-t/3}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Se $\mathbb{V} = \mathbb{C}^3$ (ou seja: se $\mathbb{V}$ é o conjunto das triplas de números complexos (x_1, x_2, x_3)), defina

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3).$$

Sejam agora $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{V}$ e defina

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \equiv \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (y_i - \overline{y}).$$

Verifique se $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ é um produto interno legítimo

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

(i)

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (y_i - \overline{y}) = \left[\sum_{i=1}^{3} (y_i - \overline{y})^* (x_i - \overline{x}) \right]^* = [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]^*. \qquad \checkmark$$

(ii)

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}] &= \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* ((y_i + z_i) - (\overline{y} + \overline{z})) \\ &= \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (y_i - \overline{y}) + \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (z_i - \overline{z}) \\ &= [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] + [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}]. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}] &= \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (\alpha y_i - \alpha \overline{y}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (y_i - \overline{y}) = \alpha [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]. \qquad \checkmark. \end{aligned}$$

Considere entretanto $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1) \neq \boldsymbol{0}$; então $\overline{x} = 1$ e

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \overline{x})^* (x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{3} (1 - 1)^* (1 - 1) = 0;$$

existe portanto um vetor $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ tal que $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] = 0$ e, portanto, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ não é um produto interno legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Obtenha a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = x + \mathrm{i}, \qquad -\pi \le x \le \pi, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2n\mathrm{i}\pi x}{L}};\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2n\mathrm{i}\pi x}{L}} f(x)\,\mathrm{d}x;\\
a &= -\pi,\\
b &= +\pi,\\
L &= b - a = 2\pi;\\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-\frac{2n\mathrm{i}\pi x}{2\pi}}\,[x + \mathrm{i}]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}[x + \mathrm{i}]\,\mathrm{d}x;\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(nx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(nx)]\,[x + \mathrm{i}]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x\right\};\\
\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x &= 0,\\
\int_{-\pi}^{+\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{2\pi(-1)^n}{n},\\
c_n &= \frac{-\mathrm{i}}{2\pi} \times -\frac{2\pi(-1)^n}{n} = \mathrm{i}\frac{(-1)^n}{n}, \qquad n \neq 0.
\end{aligned}$$

O cálculo de c_0 precisa ser feito separadamente:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [x + \mathrm{i}]\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}.$$

Portanto,

$$(x + \mathrm{i}) = \mathrm{i}\left[1 + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Utilizando obrigatoriamente o método de separação de variáveis, $\phi(x,t) = X(x)T(t)$, resolva

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}; \qquad \phi(0,t) = 0, \qquad \phi(1,t) = 0, \qquad \phi(x,0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= X(x)T(t),\\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 T\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2},\\
\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda.
\end{aligned}$$

A solução em termos de autofunções e autovalores é

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= -n^2\pi^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\\
X_n(x) &= \operatorname{sen}(n\pi x).
\end{aligned}$$

Procuramos portanto

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= 1,\\
\phi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2\alpha^2 t}\operatorname{sen}(n\pi x),\\
1 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x),\\
1\operatorname{sen}(m\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(m\pi x)\operatorname{sen}(n\pi x)\\
\int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 A_n \operatorname{sen}(m\pi x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x\\
\int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 A_m \operatorname{sen}^2(m\pi x)\,\mathrm{d}x = A_m\frac{1}{2},\\
\frac{1-(-1)^m}{m\pi} &= A_m\frac{1}{2},\\
A_m &= \frac{2(1-(-1)^m)}{m\pi}.
\end{aligned}$$

Note que $A_m = 0$ se m é par. Apenas os valores ímpares sobrevivem. Redefina portanto

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{(2n-1)\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,\\
\phi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{e}^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t}\operatorname{sen}((2n-1)\pi x) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$