TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 27 set 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Utilizando a fórmula usual para a derivada numérica de ordem 2,

$$\frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} = \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} + \mathscr{O}(\Delta x^2),$$

discretize o problema de valor de contorno

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = 0, \qquad \phi(0) = 1, \qquad \phi(1) = 2,$$

para $x \in [0,1]$ com

$$\Delta x = 1/4, \qquad x_i = i\Delta x,\ i = 0, \ldots, 4.$$

O resultado é um sistema de 3 equações nas incógnitas ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 (note que $\phi_0 = 1$ e $\phi_4 = 2$ são conhecidos) com a forma

$$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{\phi}] = [\boldsymbol{b}].$$

Obtenha as matrizes $[\boldsymbol{A}]_{3\times3}$ e $[\boldsymbol{b}]_{3\times1}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} = \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} &= 0,\\
\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1} &= 0;\\
\phi_0 - 2\phi_1 + \phi_2 &= 0;\\
\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3 &= 0;\\
\phi_2 - 2\phi_3 + \phi_4 &= 0.
\end{aligned}$$

mas $\phi_0 = 1$, $\phi_4 = 2$:

$$\begin{aligned}
-2\phi_1 + \phi_2 &= -1;\\
\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3 &= 0;\\
\phi_2 - 2\phi_3 \qquad &= -2.
\end{aligned}$$

Donde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} \phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ -2 \end{bmatrix}}_{[b]} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] **Um esquema regressivo (*upwind*) de ordem 2.** Expanda em série de Taylor $u(x,t)$ desde x_i até x_{i-1} e x_{i-2} (igualmente espaçados), elimine $\partial^2 u/\partial x^2$ e encontre uma aproximação de diferenças finitas para $\partial u/\partial x|_{x_i}$ cujo erro é $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. **Nota**: a expansão de série de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de x_0 é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
u_{i-1} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i \Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i \frac{\Delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x^3),\\
u_{i-2} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 2\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i \frac{(2\Delta x)^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x^3).
\end{aligned}$$

Para eliminar $\partial^2 u/\partial x^2$, multiplicamos a primeira equação acima por 4, e subtraímos:

$$\begin{aligned}
4u_{i-1} &= 4u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 4\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i 2\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3),\\
u_{i-2} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 2\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i 2\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3),\\
4u_{i-1} - u_{i-2} &= 3u_i - 2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^3);\\
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i &= \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Faça a análise de estabilidade para o esquema explícito que tenta resolver a equação da onda cinemática:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\epsilon_i^{n+1} &= \epsilon_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}(\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n),\\
t_n &= n\Delta t,\\
x_i &= i\Delta x,\\
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right);
\end{aligned}$$

eliminando o fator comum $\xi_l \mathrm{e}^{at_n + \mathrm{i}k_l i\Delta x}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)\\
&= 1 - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}\,k_l\Delta x.
\end{aligned}$$

Mas $|\mathrm{e}^{a\Delta t}| > 1,\ \forall \mathrm{Co}$, e o esquema é incondicionalmente instável ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Calcule

$$\mathscr{L}\left\{\cosh(at)\right\}$$

obrigatoriamente a partir de

$$\mathscr{L}\left\{\mathrm{e}^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\cosh(at)\right\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{-at}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+a+s-a}{s^2-a^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-a^2} \\
&= \frac{s}{s^2-a^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Sabendo que

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

resolva a equação diferencial

$$y'' + y = t, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'' + y\} &= \mathscr{L}\{t\} \\
s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0) + \overline{y} &= \frac{1}{s^2}, \\
s^2\overline{y} - s - 1 + \overline{y} &= \frac{1}{s^2}, \\
\overline{y}(s^2+1) - (s+1) &= \frac{1}{s^2}, \\
\overline{y}(s^2+1) &= (s+1) + \frac{1}{s^2} = \frac{s^3+s^2+1}{s^2}, \\
\overline{y} &= \frac{s^3+s^2+1}{s^2(s^2+1)}, \\
\overline{y} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Resolvendo para as frações parciais,

$$A = 0,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0$$

ou

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2}, \\
y(t) &= \cos(t) + t \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹