TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
S, 28 jun 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

1 [20] Em Python, o operador `%` aplicado a argumentos inteiros positivos calcula o resto da divisão. Por exemplo, `10 % 3 == 1`.
Dado o programa em Python abaixo,

```
def mdc(a, b):
   assert (type(a) == int);
   assert (type(b) == int);
   assert (a > 0);
   assert (b > 0);
   while b != 0 :
      t = b
      b = a % b
      a = t
   return a
print(mdc(16,4));
```

faça o algoritmo **manualmente** e mostre o valor que ele imprime na tela.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

inicialmente, `a == 16, b == 4`; `b != 0` e um novo par de valores é computado:

```
t = 4
b = 16 % 4 = 0
a = t = 4,
```

Agora `a == 4, b == 0`, e o corpo do `while` não é mais executado. A rotina devolve o valor de `a`, e o programa imprime `4` ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são 3 vetores do $\mathbb{R}^3$, **utilizando obrigatoriamente notação indicial e a definição do determinante com o auxílio do símbolo de permutação** ϵ_{ijk}, mostre que

$$\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \det(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k \\ &= \epsilon_{kij} w_k u_i v_j \\ &= \det(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \;\blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Obtenha os autovalores e autovetores de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0\\
(1-\lambda)\times[(1-\lambda)^2-2] - 2\times[0(1-\lambda)-1(0)] + 1\times[0(2)-0(1-\lambda)] &= 0\\
(1-\lambda)\times[1-2\lambda+\lambda^2-2] &= 0\\
(1-\lambda)\times[\lambda^2-2\lambda-1] &= 0,\\
\lambda &= 1,\\
\lambda^2-2\lambda-1 &= 0\\
\lambda &= \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}\\
\lambda &= \frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}\\
\lambda &= 1\pm\sqrt{2},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1,\\
\lambda_2 &= 1+\sqrt{2},\\
\lambda_3 &= 1-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Agora buscamos os autovetores. Se $\lambda = 1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned}
v_1 + 2v_2 + v_3 &= v_1,\\
v_2 + v_3 &= v_2\\
2v_2 + v_3 &= v_3
\end{aligned}$$

e o primeiro autovetor é (qualquer múltiplo de)

$$(1, 0, 0).$$

Se $\lambda = 1+\sqrt{2}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (1+\sqrt{2})\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned}
v_1 + 2v_2 + v_3 &= (1+\sqrt{2})v_1,\\
v_2 + v_3 &= (1+\sqrt{2})v_2 \ \Rightarrow\ v_3 = \sqrt{2}v_2\\
2v_2 + v_3 &= (1+\sqrt{2})v_3 \ \Rightarrow\ 2v_2 = \sqrt{2}v_3
\end{aligned}$$

As 2ª e 3ª equações são LD; substituindo a 2ª na 1ª

$$\begin{aligned}
v_1 + 2v_2 + \sqrt{2}v_2 &= (1+\sqrt{2})v_1,\\
(2+\sqrt{2})v_2 &= \sqrt{2}v_1\\
(\sqrt{2}+1)v_2 &= v_1,
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

O 2º autovetor é qualquer múltiplo de

$$
\begin{aligned}
((1+\sqrt{2})v_2, v_2, \sqrt{2}v_2),\\
(1+\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

Se $\lambda = 1-\sqrt{2}$,

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (1-\sqrt{2}) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
v_1 + 2v_2 + v_3 &= (1-\sqrt{2})v_1,\\
v_2 + v_3 &= (1-\sqrt{2})v_2 \ \Rightarrow\ v_3 = -\sqrt{2}v_2\\
2v_2 + v_3 &= (1-\sqrt{2})v_3 \ \Rightarrow\ 2v_2 = -\sqrt{2}v_3
\end{aligned}
$$

As 2ª e 3ª equações são LD; substituindo a 2ª na 1ª

$$
\begin{aligned}
v_1 + 2v_2 - \sqrt{2}v_2 &= (1-\sqrt{2})v_1,\\
(2-\sqrt{2})v_2 &= -\sqrt{2}v_1\\
(1-\sqrt{2})v_2 &= v_1,
\end{aligned}
$$

O 3º autovetor é qualquer múltiplo de

$$
\begin{aligned}
((1-\sqrt{2})v_2, v_2, -\sqrt{2}v_2),\\
(1-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = y.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Esta é uma equação de ordem 1, linear, homogênea, e separável.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x-1)y = 0,&\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (1-x)y,\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= (1-x)\mathrm{d}x,\\
\ln|y| &= x - \frac{x^2}{2} + c_1,\\
|y| &= \mathrm{e}^{c_1}\exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right),\\
|y| &= k_1\exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right),\\
y &= \pm k_1 \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = k\exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Usando obrigatoriamente o método de Frobenius, obtenha a solução geral de

$$y'' + xy = 0$$

em torno de $x = 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Note que $[xp(x)] = 0$, $[x^2 q(x)] = x^3$ são analíticas em $x = 0$; além disso, na verdade $x = 0$ é um ponto ordinário, e nós antecipamos que haverá uma solução em série de potências sem expoentes fracionários. Mesmo assim, começo com

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} \\
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}.
\end{aligned}$$

A equação diferencial torna-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{2} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) a_n + a_{n-3}\right] x^{n+r-2} = 0.$$

Suponho $a_0 \neq 0$, e obtenho a equação indicial

$$(r-1)r = 0,$$

donde $r = 0$ ou $r = 1$. Sei que neste caso a menor raiz *pode* levar à solução geral. Tento:

$$(0-1) \times (0) \times a_0 x^{-2} + (0) \times (1) \times a_1 x^{-1} + (1) \times (2) \times a_2 x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) a_n + a_{n-3}\right] x^{n+r-2} = 0.$$

Note que a_0 e a_1 estão livres, e que é *forçoso* fazer $a_2 = 0$. A relação de recorrência para os $a_n s$ é

$$a_n = -\frac{a_{n-3}}{(n-1)n},$$

donde

$$a_5 = a_8 = a_{11} = \ldots\ 0.$$

A 1ª solução LI é obtida a partir de $a_0 = 1$:

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{180} x^6 - \frac{1}{12960} x^9 + \ldots$$

A 2ª solução LI é obtida a partir de $a_1 = 1$:

$$y_2(x) = x - \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{504} x^7 - \frac{1}{45360} x^{10} + \ldots$$

A solução geral é

$$y(x) = A y_1(x) + B y_2(x) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$