TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 26 jun 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Obtenha a solução de

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y &= \mathrm{e}^{-x},\\
y(0) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + uv &= \mathrm{e}^{-x},\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^{-x},\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\mathrm{d}x,\\
\ln|v| &= -x + k_1,\\
|v| &= \mathrm{e}^{k_1}\mathrm{e}^{-x},\\
|v| &= k_2\mathrm{e}^{-x},\\
v &= \pm k_2\mathrm{e}^{-x} = v_0\mathrm{e}^{-x};\\
v_0\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^{-x},\\
v_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{v_0},\\
u &= u_0 + \frac{x}{v_0};\\
y &= uv = \left[u_0 + \frac{x}{v_0}\right]v_0\mathrm{e}^{-x}\\
&= u_0v_0\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x},\\
&= y_0\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x};\\
y(0) = 1 &\Rightarrow y_0 = 1;\\
y &= \mathrm{e}^{-x}(1+x) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Obtenha a solução geral de

$$y'' - 3y' + 2y = x^2.$$

Observação:

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -(x^2+2x+2)e^{-x} + C,$$
$$\int x^2 e^{-2x}\,dx = -\frac{(2x^2+2x+1)}{4}e^{-2x} + C.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A solução da equação homogênea associada é

$$\begin{aligned} y_h'' - 3y_h' + 2y_h &= 0,\\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0,\\ \lambda_1 &= 1,\\ \lambda_2 &= 2,\\ y_h(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

Use o método de variação de constantes,

$$\begin{aligned} y &= A(x)e^x + B(x)e^{2x},\\ y' &= Ae^x 2Be^{2x} + \underbrace{\left[A'e^x + B'e^{2x}\right]}_{=0},\\ y'' &= Ae^x + 4Be^{2x} + A'e^x + 2B'e^{2x} \end{aligned}$$

Substituindo na equação original,

$$\begin{aligned} \left(Ae^x + 4Be^{2x} + A'e^x + 2B'e^{2x}\right) - 3\left(Ae^x + 2Be^{2x}\right) + 2\left(Ae^x + Be^{2x}\right) &= x^2,\\ \frac{dA}{dx}e^x + 2\frac{dB}{dx}e^{2x} &= x^2. \end{aligned}$$

Agora, a condição de controle das derivadas segundas de A e B é $A'e^x + B'e^{2x} = 0$ (ver termo no colchete horizontal acima); temos portanto o sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem 1:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx}e^x + 2\frac{dB}{dx}e^{2x} &= x^2,\\ \frac{dA}{dx}e^x + \frac{dB}{dx}e^{2x} &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando primeiro dB/dx,

$$\begin{aligned} -\frac{dA}{dx}e^x &= x^2,\\ \frac{dA}{dx} &= -x^2e^{-x},\\ A(x) &= (x^2+2x+2)e^{-x} + C_1. \end{aligned}$$

Analogamente, eliminando dA/dx,

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dx} &= x^2e^{-2x},\\ B(x) &= -\frac{(2x^2+2x+1)}{4}e^{-2x} + C_2. \end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned} y(x) &= A(x)e^x + B(x)e^{2x},\\ &= \left[(x^2+2x+2)e^{-x} + C_1\right]e^x + \left[-\frac{(2x^2+2x+1)}{4}e^{-2x} + C_2\right]e^{2x},\\ &= C_1e^x + C_2e^{2x} + x^2 + 2x + 2 - \frac{(2x^2+2x+1)}{4}\\ &= C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}\ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Obtenha a solução geral de

$$x^2y'' + xy' - y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Trata-se de uma equação de Euler:

$$\begin{aligned}
y &= x^r,\\
y' &= rx^{r-1},\\
y'' &= (r-1)rx^{r-2};\\
(r-1)rx^r + rx^r - x^r &= 0,\\
r^2 - r + r - 1 &= 0,\\
r^2 &= 1,\\
r &= \pm 1.
\end{aligned}$$

A solução geral é

$$y(x) = c_1x + c_2\frac{1}{x} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Calcule a série de Laurent de $f(z) = 1/(z-2)$ em torno de $z = 0$ para o disco $|z| > 2$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{(1-2/z)} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 + (2/z) + (2/z)^2 + (2/z)^3 + \ldots\right] \qquad (|z| > 2) \\
&= \left[\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2^3}{z^4} + \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Utilizando o método de Frobenius, encontre **uma** solução de

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
b) Faça

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1},\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}.
\end{aligned}
$$

e substitua:

$$
\begin{aligned}
x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2} + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0,\\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0.
\end{aligned}
$$

Faça

$$
\begin{aligned}
m + r &= n + r - 1,\\
m &= n - 1,\\
n &= m + 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r)(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r} + \sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} +&\\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0,\\
\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r)(n+r+1)a_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)a_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} +&\\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0,\\
\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)^2 a_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0,\\
\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)^2 a_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}[1-(n+r)]a_n x^{n+r} &= 0,\\
r^2 a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+r+1)^2 a_{n+1} + [1-(n+r)]a_n\right\}x^{n+r} &= 0.
\end{aligned}
$$

Faça $a_0 \neq 0$; então $r = 0$ é raiz dupla, e estamos no caso ii do teorema 10.1 do livro-texto. A primeira solução pode ser obtida a partir de

$$
\begin{aligned}
(n+r+1)^2 a_{n+1} + [1-(n+r)]a_n &= 0,\\
r &= 0,\\
a_{n+1} &= \frac{n-1}{(n+1)^2}a_n,
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Fazendo $a_0 = 1$ sem perda de generalidade, encontramos

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= -1, \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= 0, \\
&\vdots \\
a_n &= 0, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Portanto, uma solução é

$$y_1(x) = 1 - x \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$