TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 10 mai 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] O programa em Python abaixo **não** implementa corretamente a operação matemática de multiplicar um vetor $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$ por um escalar 3:

```
a = [1,2,3]
b = 3*a
print(b)
```

Modifique o programa para que ele imprima a resposta certa, `[3,6,9]`.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
from numpy import array
a = array([1,2,3])
b = 3*a
print(b)
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Sabemos que

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2},$$

onde $k = |\boldsymbol{k}|$, são os elementos da matriz da transformação $\boldsymbol{P}$, na base canônica, que projeta qualquer vetor $\boldsymbol{a}$ do $\mathbb{R}^3$ no plano que passa pela origem e é normal ao vetor $\boldsymbol{k}$. **Atenção: aqui, em geral $\boldsymbol{k}$ não é o vetor unitário na direção de x_3, mas sim um vetor qualquer.** Para $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{k}$ não nulos e não colineares, calcule, **utilizando obrigatoriamente notação indicial**,

$$[\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}] \times \boldsymbol{k}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a} &= P_{ij}a_j\boldsymbol{e}_i = P_{il}a_l\boldsymbol{e}_i;\\
[\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{k} &= \epsilon_{ijk}P_{il}a_lk_j\boldsymbol{e}_k\\
&= \epsilon_{ijk}\left[\delta_{il} - \frac{k_ik_l}{k^2}\right]a_lk_j\boldsymbol{e}_k\\
&= \epsilon_{ijk}a_ik_j\boldsymbol{e}_k - \frac{(a_lk_l)}{k^2}\epsilon_{ijk}k_ik_j\boldsymbol{e}_k\\
&= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k} - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})}{k^2}\underbrace{[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}]}_{\equiv\boldsymbol{0}}\\
&= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Calcule os autovalores e autovetores de

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A equação característica é

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0; \\ (1-\lambda)(1-\lambda) - 4 &= 0; \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 &= 0; \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3)}}{2}; \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}; \\ &= \begin{cases} -1, \\ +3. \end{cases} \end{aligned}$$

Para $\lambda = -1$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= -1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \\ 1v_1 + 2v_2 &= -v_1, \\ 2v_1 + v_2 &= -v_2 \end{aligned}$$

que produzem uma única equação independente:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 0, \\ v_2 &= -v_1. \end{aligned}$$

portanto, $(1, -1)$ é um autovetor associado a $\lambda = -1$.
Para $\lambda = 3$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= 3 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \\ v_1 + 2v_2 &= 3v_1, \\ 2v_1 + v_2 &= 3v_2 \end{aligned}$$

que produzem uma única equação independente:

$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0, \\ v_2 &= v_1. \end{aligned}$$

portanto, $(1, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda = 3$ ∎

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Calcule o jacobiano $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ da mudança de variáveis

$$
\begin{aligned}
x &= 3u,\\
y &= u + v.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Sabendo que, para $c > 0$, tem-se

$$\int \sqrt{1 + cy^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\operatorname{arcsenh}(\sqrt{c}y)}{2\sqrt{c}} + \frac{y\sqrt{1+cy^2}}{2},$$

calcule a área da superfície

$$f(x, y) = 1 + x - y^2,$$

cuja projeção no plano xy é a região $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 1 + x - y^2,\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -2y,\\
A &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\sqrt{1 + 1 + 4y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}\sqrt{2(1 + 2y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{y=0}^{1}\sqrt{2(1 + 2y^2)}\int_{x=0}^{1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \sqrt{2}\int_{y=0}^{1}\sqrt{1 + 2y^2}\,\mathrm{d}y\\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{arcsenh}(\sqrt{c}y)}{2\sqrt{c}} + \frac{y\sqrt{1+cy^2}}{2}\right]_{y=0}^{y=1}\\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{arcsenh}(\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1+2}}{2}\right]\\
&= \left[\frac{\operatorname{arcsenh}(\sqrt{2})}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹