TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 27 mar 2024
Prof. Nelson Luís Dias

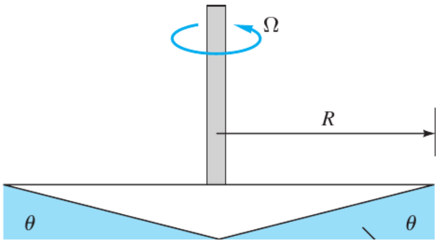
0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

1 [20] A figura ao lado mostra um viscosímetro de cone. O cone invertido gira com velocidade angular Ω, forçado por um torque M (lembre-se de que torque é momento de força) no eixo. O ângulo entre o fluido e o cone é θ. O fluido sob o cone tem viscosidade dinâmica μ ($[\![\mu]\!] = \mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-1}}$), e o viscosímetro gira com velocidade angular constante Ω. Obtenha os grupos adimensionais deste problema, sendo que um dos grupos deve conter μ com expoente obrigatoriamente igual a 1.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As variáveis do problema e suas dimensões são

θ	1
μ	$\mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-1}}$
M	$\mathsf{ML^2T^{-2}}$
R	L
Ω	$\mathsf{T^{-1}}$

Note que θ é adimensional, e que portanto o primeiro grupo é o próprio θ:

$$\Pi_1 = \theta.$$

As 4 variáveis dimensionais restantes envolvem 3 dimensões fundamentais M, L e T, e esperamos que formem $4 - 3 = 1$ grupo adimensional adicional:

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= \mu M^a R^b \Omega^c \\
[\![\Pi_2]\!] &= [\![\mu]\!]\,[\![M]\!]^a\,[\![R]\!]^b\,[\![\Omega]\!]^c \\
1 &= \mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-1}}[\mathsf{ML^2T^{-2}}]^a[\mathsf{L}]^b[\mathsf{T^{-1}}]^c \\
&= \mathsf{M}^{1+a}\mathsf{L}^{-1+2a+b}\mathsf{T}^{-1-2a-c}.
\end{aligned}$$

Obtemos o sistema

$$\begin{aligned}
a &= -1, \\
2a + b &= 1 \\
2a + c &= -1
\end{aligned}$$

donde $a = -1$, $b = 3$, $c = 1$ e

$$\Pi_2 = \frac{\mu\Omega R^3}{M} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] A *regra de Simpson* para um número par de pontos $2n$ é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
h &= (b-a)/(2n),\\
x_0 &= a,\\
x_{2n} &= b,\\
x_i &= a + ih,
\end{aligned}
$$

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right].
$$

Escreva uma função `simpson(m,a,b,f)` que calcule a integral numérica pela regra de Simpson.

Note que m é obrigatoriamente par, e que $n = m/2$ nas equações acima.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
def simpson(m,a,b,f):
   assert(m % 2 == 0)
   h = (b-a)/m
   Se = f(a) + f(b)
   S4 = 0.0
   for i in range(1,m,2):
      xi = a + i*h
      S4 += f(xi)
   S4 *= 4
   S2 = 0.0
   for i in range(2,m,2):
      xi = a + i*h
      S2 += f(xi)
   S2 *= 2
   I = (h/3.0)*(Se + S4 + S2)
   return I
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] A série de Taylor de e^u em torno de 0 é

$$\mathrm{e}^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}. \tag{*}$$

a) [10] Obtenha analiticamente

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u.$$

b) [10] Integrando termo a termo a série (*), obtenha a série de $F(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x - 1.$$

b)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{u^n}{n!} \,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x u^n \,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1!} x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Faça

$$\begin{aligned}
m &= n+1, \\
n &= m-1; \Rightarrow \\
F(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m \\
&= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m}_{\mathrm{e}^x} - 1 \\
&= \mathrm{e}^x - 1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Seja $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$. Sabendo que em notação indicial um índice repetido sem parênteses indica soma de 1 a 3, e que um índice repetido entre parênteses suprime a soma, obtenha

a) [10] $\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_l = ?$

b) [10] $\boldsymbol{e}_{(l)} \cdot \boldsymbol{e}_{(l)} = ?$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_l &= \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\
&= 1 + 1 + 1 = 3
\end{aligned}
$$

b)

$$
\boldsymbol{e}_{(l)} \cdot \boldsymbol{e}_{(l)} = 1,
$$

para *um único* l entre 1 e 3 ■

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Seja $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ uma base não-ortogonal do $\mathbb{R}^3$, onde

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (2,0,0),\\
\boldsymbol{v}_2 &= (1,3,0),\\
\boldsymbol{v}_3 &= (2,1,2).
\end{aligned}$$

Obtenha uma base ortonormal a partir de V utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmmidt.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \boldsymbol{v}_1;\\
\boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_1|}\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{2}(2,0,0) = (1,0,0);\\
\boldsymbol{f}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1\\
&= (1,3,0) - ((1,3,0)\cdot(1,0,0))(1,0,0)\\
&= (1,3,0) - 1(1,0,0) = (0,3,0);\\
\boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_2|}\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}(0,3,0) = (0,1,0);\\
\boldsymbol{f}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2\\
&= (2,1,2) - ((2,1,2)\cdot(1,0,0))(1,0,0) - ((2,1,2)\cdot(0,1,0))(0,1,0)\\
&= (2,1,2) - 2(1,0,0) - 1(0,1,0) = (0,0,2);\\
\boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_3|}\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{2}(0,0,2) = (0,0,1) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹