TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01A, 11 ago 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] O programa `onda1d-ins.py` apresentado em sala de aula calcula $1/0.0005 = 2000$ passos de tempo n da solução numérica u_i^n da equação da onda cinemática; no entanto, a linha

```
u = zeros((2,nx+1),float)
```

aloca apenas 2 linhas para o tempo. Explique, **em Português claro e correto**, por que apenas 2 são suficientes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

No esquema de diferenças finitas utilizado pelo programa `onda1d-ins.py`, os valores da função u no tempo $n+1$ dependem apenas dos valores no tempo n. Portanto, partindo de $n = 0$, podemos calcular numericamente

$$\text{passo de tempo } n = 1: \qquad \mathtt{u[1]} = f(\mathtt{u[0]}),$$

onde $f(\cdot)$ representa genericamente o esquema de diferenças finitas explícito para todos os pontos da malha, e `u[1]` guarda os valores de $u^{(n=1)}$. Depois que os valores de `u[0]` foram escritos em disco, eles não são mais necessários para o algoritmo, *e podem ser sobrescritos*. Portanto, no próximo passo de tempo podemos fazer

$$\text{passo de tempo } n = 2: \qquad \mathtt{u[0]} = f(\mathtt{u[1]}),$$

e utilizar `u[0]` para guardar os valores de $u^{(n=2)}$. Agora, é a linha `u[1]` que não é mais necessária; após escrevê-la em disco, podemos reutilizá-la:

$$\text{passo de tempo } n = 3: \qquad \mathtt{u[1]} = f(\mathtt{u[0]}),$$

e assim sucessivamente. A forma simples de implementar a troca de índices é fazer

```
(old,new) = (0,1)
```

inicialmente e depois trocar a cada passo de tempo:

```
(new,old) = (old,new)
```
■

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Desejamos resolver numericamente a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = k\phi,$$

onde c e k são constantes positivas, com o esquema numérico

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + c\frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x} = k\phi_i^n$$

Faça uma análise de estabilidade de von Neumann, e mostre que a condição de estabilidade é do tipo

$$\alpha \mathrm{Co}[\mathrm{Co} - (\mathrm{Ka}+1)] + \beta(\mathrm{Ka}+1)^2 \le 1$$

onde $\mathrm{Co} = c\Delta t/\Delta x$ e $\mathrm{Ka} = k\Delta t$, ou seja: **encontre** α e β. Note que α depende de $C_k \equiv \cos(k_l \Delta x)$ na notação padrão utilizada nesta disciplina.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Sabemos que a mesma equação de diferenças finitas se aplica para os erros de arredondamento; portanto,

$$\frac{\epsilon_i^{n+1} - \epsilon_i^n}{\Delta t} + c\frac{\epsilon_i^n - \epsilon_{i-1}^n}{\Delta x} = k\epsilon_i^n.$$

Expandimos em série de Fourier,

$$\epsilon_i^n = \sum_{i=1}^{N/2} \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i},$$

e substituímos na equação de diferenças. Cada harmônico agora obedece a

$$\frac{\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i}}{\Delta t} + c\frac{\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(x_i-\Delta x)}}{\Delta x} = k\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i}$$

$$\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} + \underbrace{\frac{c\Delta t}{\Delta x}}_{\mathrm{Co}}\left(\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(x_i-\Delta x)}\right) = \underbrace{k\Delta t}_{\mathrm{Ka}}\,\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i}$$

$$\mathrm{e}^{a\Delta t} - 1 + \mathrm{Co}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right) = \mathrm{Ka}$$

Portanto devemos ter

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \mathrm{Co}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right) + \mathrm{Ka}, \\
&= (1 + \mathrm{Ka} - \mathrm{Co}) + \mathrm{Co}\cos(k_l\Delta x) - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(k_l\Delta x);
\end{aligned}$$

Desejamos que o módulo do fator de amplificação $\mathrm{e}^{a\Delta t}$ seja menor que 1. O módulo (ao quadrado) é

$$\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 = (1 + \mathrm{Ka} - \mathrm{Co} + \mathrm{Co}\cos(k_l\Delta x))^2 + (\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(k_l\Delta x))^2\,.$$

Para aliviar a notação, façamos

$$\begin{aligned}
C_k &\equiv \cos(k_l\Delta x), \\
S_k &\equiv \mathrm{sen}(k_l\Delta x).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 &= (\mathrm{Co}S_k)^2 + (1 + \mathrm{Ka} - \mathrm{Co} + \mathrm{Co}C_k)^2 \\
&= \cancel{\mathrm{Ka}^2} + \cancel{2C_k\mathrm{Co}\mathrm{Ka}} - \cancel{2\mathrm{Co}\mathrm{Ka}} + \cancel{2\mathrm{Ka}} + \cancel{C_k^2\mathrm{Co}^2} - \cancel{2C_k\mathrm{Co}^2} + \cancel{\mathrm{Co}^2} + \cancel{2C_k\mathrm{Co}} - \cancel{2\mathrm{Co}} + \cancel{1} \\
&= \mathrm{Co}^2S_k^2 + (\mathrm{Co}^2C_k^2 + \mathrm{Co}^2 + \mathrm{Ka}^2 + 1) + 2(-\mathrm{Co}^2C_k + \mathrm{Co}C_k\mathrm{Ka} + \mathrm{Co}C_k - \mathrm{Co}\mathrm{Ka} - \mathrm{Co} + \mathrm{Ka}) \\
&= (2\mathrm{Co}^2 + \mathrm{Ka}^2 + 1) + 2(-\mathrm{Co}^2C_k + \mathrm{Co}C_k\mathrm{Ka} + \mathrm{Co}C_k - \mathrm{Co}\mathrm{Ka} - \mathrm{Co} + \mathrm{Ka}) \\
&= \mathrm{Co}^2(2 - 2C_k) + 2\mathrm{Co}(C_k\mathrm{Ka} + C_k - \mathrm{Ka} - 1) + \mathrm{Ka}^2 + 2\mathrm{Ka} + 1 \\
&= 2\mathrm{Co}^2(1 - C_k) + 2\mathrm{Co}(C_k - 1 + \mathrm{Ka}(C_k - 1)) + (\mathrm{Ka}+1)^2 \\
&= 2\mathrm{Co}^2(1 - C_k) + 2\mathrm{Co}((C_k - 1)(\mathrm{Ka}+1)) + (\mathrm{Ka}+1)^2.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

A condição para que o esquema de diferenças finitas seja estável é, então,

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Co}^2(1-C_k) + 2\mathrm{Co}(C_k-1)(\mathrm{Ka}+1) + (\mathrm{Ka}+1)^2 &\le 1,\\
2\mathrm{Co}\left[\mathrm{Co}(1-C_k) + (C_k-1)(\mathrm{Ka}+1)\right] + (\mathrm{Ka}+1)^2 &\le 1,\\
2(1-C_k)\mathrm{Co}[\mathrm{Co}-(\mathrm{Ka}+1)] + (\mathrm{Ka}+1)^2 &\le 1,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2(1-C_k),\\
\beta &= 1 \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Calcule, por integração a partir da definição,

$$\mathscr{L}\left\{t\mathrm{e}^{-t}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t\mathrm{e}^{-t}\right\} &= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{\infty} t\mathrm{e}^{-(1+s)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(s+1)^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Em detalhe,

$$\mathscr{L}\left\{t\mathrm{e}^{-t}\right\} = \frac{1}{-(1+s)} \int_{t=0}^{\infty} \underbrace{t}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^{-(1+s)t}\left[-(1+s)\right]\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}v}$$

Então

$$\begin{aligned}
u &= t, & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}t, \\
\mathrm{d}v &= \mathrm{e}^{-(1+s)t}\left[-(1+s)\right]\mathrm{d}t & v &= \mathrm{e}^{-(1+s)t}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t\mathrm{e}^{-t}\right\} &= \frac{1}{-(1+s)}\left[uv\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v\mathrm{d}u\right] \\
&= \frac{1}{-(1+s)}\left[\cancelto{0}{\lim_{t\to\infty}\left(t\mathrm{e}^{-(1+s)t}\right)} - \cancelto{0}{\lim_{t\to 0}\left(t\mathrm{e}^{-(1+s)t}\right)} - \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(1+s)t}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{1+s}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(1+s)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-1}{(1+s)^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(1+s)t}\left[-(1+s)\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{-1}{(1+s)^2}\left[\cancelto{0}{\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(1+s)t}} - \cancelto{1}{\lim_{t\to 0}\mathrm{e}^{-(1+s)t}}\right] \\
&= \frac{1}{(1+s)^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Calcule a transformada de Laplace de

$$y'' + y = \operatorname{sen}(x), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

Simplifique ao máximo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{y'' + 1\right\} &= \mathscr{L}\left\{\operatorname{sen}(x)\right\}, \\
\left[s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0)\right] + \overline{y} &= \frac{1}{s^2+1} \\
\left[s^2\overline{y} - s - 1\right] + \overline{y} &= \frac{1}{s^2+1} \\
\overline{y}(s^2+1) &= (s+1) + \frac{1}{s^2+1} \\
\overline{y}(s^2+1) &= \frac{s^3+s^2+s+2}{s^2+1} \\
\overline{y}(s) &= \frac{s^3+s^2+s+2}{(s^2+1)^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01B, 18 ago 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Seja o esquema de diferenças finitas *upwind* explícito e condicionalmente estável para a equação da onda:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathrm{Co}[u_i^n - u_{i-1}^n].$$

Considere que a matriz `u` foi alocada com `u = zeros((2,nx+1),float)`, onde `zeros` foi importada de `numpy`, com `nx=1000`, e que você está calculando `u[new]` a partir de `u[old]`, sendo que `old` refere-se ao passo de tempo n, e `new` ao passo de tempo $n+1$. Mostre como, utilizando a técnica de *slicing*, você pode calcular `u[new,1:nx]` *em apenas uma linha de código em Python (usando numpy)*; suponha que a variável `Cou`, com o número de Courant, já foi calculada e que ela garante a estabilidade do esquema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
u[new,1:nx] = u[old,1:nx] - Cou*(u[old,1:nx] - u[old,0:nx-1])
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] **Sem utilizar frações parciais**, encontre a transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Uso o teorema da convolução,

$$\mathscr{L}[f*g] = \overline{f}(s)\overline{g}(s) \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{f}(s)\overline{g}(s)\right\} = \int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Mas

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f(t) = 1, \quad \overline{g}(s) = \frac{1}{s^2+4} \Rightarrow g(t) = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2},$$

donde

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_{\tau=0}^{t} \frac{\operatorname{sen} 2(t-\tau)}{2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1-\cos 2t}{4} \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Usando, obrigatoriamente, transformada de Laplace, resolva o problema de valor inicial

$$x'' + 4x' + 3x = \mathrm{e}^{-3t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

ou seja: encontre $x(t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial e introduzindo as condições iniciais,

$$\begin{aligned}
s^2\overline{x} + 4s\overline{x} + 3\overline{x} &= \frac{1}{s+3},\\
\overline{x}(s^2 + 4s + 3) &= \frac{1}{s+3},\\
\overline{x}(s+3)(s+1) &= \frac{1}{s+3},\\
\overline{x}(s) &= \frac{1}{(s+3)^2(s+1)} = \frac{A}{(s+3)^2} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{s+1}\\
&= \frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{4(s+3)} - \frac{1}{2(s+3)^2};\\
x(t) &= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] **Utilizando obrigatoriamente decomposição em frações parciais**, calcule a transformada de Laplace inversa de

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s^2 - a^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2 - a^2} &= \frac{1}{(s-a)(s+a)} \\
&\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right]; \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - a^2}\right\} &= \frac{1}{2a}\left[\mathrm{e}^{at} - \mathrm{e}^{-at}\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{\mathrm{e}^{at} - \mathrm{e}^{-at}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{a}\,\mathrm{senh}(at) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 1 set 2023
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Resolva a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T}x = \delta(t), \qquad x(0_-) = 0,$$

usando obrigatoriamente transformadas de Laplace. Por causa da presença da distribuição delta de Dirac, é conveniente definir

$$\mathscr{L}\{f(t)\} \equiv \int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Siga o seguinte roteiro:

a) [05] Monte a tabela de transformadas de que você necessitará, na ida ou na volta, calculando $\mathscr{L}\{e^{at}\}$ e $\mathscr{L}\{\delta(t)\}$.

b) [05] Mostre que

$$\mathscr{L}\{H(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

c) [15] De posse dos resultados de a) e de b), resolva o problema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\} = \int_{0_-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-a};$$
$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= \int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)\mathrm{e}^{-s(t-a)}\mathrm{e}^{-as}\,\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{e}^{-as}\int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)\mathrm{e}^{-s(t-a)}\,\mathrm{d}(t-a)\\
&= \mathrm{e}^{-as}\int_{a}^{\infty} f(t-a)\mathrm{e}^{-s(t-a)}\,\mathrm{d}(t-a)\\
&= \mathrm{e}^{-as}\int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
&= \mathrm{e}^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
s\overline{x} - x(0_-) + \frac{1}{T}\overline{x} &= 1\\
\overline{x}\left(s + \frac{1}{T}\right) &= 1\\
\overline{x} &= \frac{1}{s - \frac{-1}{T}} = \mathscr{L}\{H(t)\mathrm{e}^{-t/T}\} \Rightarrow\\
x(t) &= H(t)\mathrm{e}^{-t/T}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Sabendo que

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = \pi,$$
$$\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3},$$
$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

utilize obrigatoriamente a desigualdade de Schwarz para obter uma desigualdade envolvendo π e $\sqrt{6}$. **Simplifique ao máximo.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
|\langle f, g\rangle| &\le \|f\|\|g\|,\\
\left|\int_0^\pi x \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \left[\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \left[\int_0^\pi \operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2};\\
\pi &\le \left[\frac{\pi^3}{3}\right]^{1/2} \left[\frac{\pi}{2}\right]^{1/2}\\
\pi &\le \left[\frac{\pi^4}{3\times 2}\right]^{1/2}\\
\pi &\le \frac{\pi^2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \quad \Rightarrow\\
\pi &\ge \sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{6} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Obtenha a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = x + \mathrm{i}, \qquad -\pi \le x \le +\pi, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2n\mathrm{i}\pi x}{L}};\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2n\mathrm{i}\pi x}{L}} f(x)\,\mathrm{d}x;\\
a &= -\pi,\\
b &= +\pi,\\
L &= b - a = 2\pi;\\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-\frac{2n\mathrm{i}\pi x}{2\pi}}\,[x+\mathrm{i}]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,[x+\mathrm{i}]\,\mathrm{d}x;\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(nx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(nx)]\,[x+\mathrm{i}]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x\right\};\\
\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= 0,\\
\int_{-\pi}^{+\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{2\pi(-1)^n}{n},\\
c_n &= \frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\times -\frac{2\pi(-1)^n}{n} = \mathrm{i}\frac{(-1)^n}{n}, \qquad n \neq 0.
\end{aligned}$$

O cálculo de c_0 precisa ser feito separadamente:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[x+\mathrm{i}]\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}.$$

Portanto,

$$(x+\mathrm{i}) = \mathrm{i}\left[1 + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] O Engenheiro Ambiental Matt Matcal sabe que duas variáveis ambientais **que sempre têm média zero**, x' e y', estão ligadas pela relação teórica $y' = (x')^2$. Por isso, ele propõe calcular um índice estatístico de dependência definido por

$$[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'] \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2 y_i',$$

onde $\boldsymbol{x}',\ \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^n$ e

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' = 0, \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i' = 0.$$

Verifique se $[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}']$ é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Para $\boldsymbol{x}',\ \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^n$ as propriedades de um produto interno são

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \rangle &= \langle \boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}' \rangle, \\
\langle \boldsymbol{x}', \alpha\boldsymbol{y}' \rangle &= \alpha \langle \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}' \rangle \\
\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{z}' \rangle &= \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \rangle + \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{z}' \rangle, \\
\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle &> 0, \qquad \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{0}, \\
\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle &= 0, \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Verifiquemos a primeira:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2 y_i' \\
&\neq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i')^2 x_i' = [\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}'],
\end{aligned}$$

e portanto o índice de Matt não é um produto interno legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02B, 15 set 2023
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Se $f(x) = 1$, $0 < x \le 1$, obtenha a série de Fourier da extensão ímpar de $f(x)$ no intervalo $-1 \le x \le 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A extensão ímpar é

$$f_I(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1, \\ -1, & -1 \le x < 0. \end{cases}$$

No intervalo $[-1, 1]$, com comprimento $L = 2$, uma base para as funções ímpares é formada pelo conjunto

$$\left\{ \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} \right\}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Segue-se o de sempre:

$$\begin{aligned} f_I(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\pi x, \\ f_I(x) \operatorname{sen} m\pi x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x, \\ \int_{-1}^{1} f_I(x) \operatorname{sen} m\pi x \, \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{-1}^{1} \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x \, \mathrm{d}x \\ 2 \int_0^1 \operatorname{sen} m\pi x \, \mathrm{d}x &= B_m \int_{-1}^{1} \left[\operatorname{sen} m\pi x \right]^2 \, \mathrm{d}x \\ \frac{2}{\pi m} \left[1 - (-1)^m \right] &= B_m \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt: dado um conjunto de n vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, $V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, é possível obter um conjunto $F = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ de vetores ortogonais entre si, e $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ de vetores ortonormais, com o seguinte algoritmo:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_1|}\boldsymbol{f}_1,\\
\boldsymbol{f}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_2|}\boldsymbol{f}_2,\\
\boldsymbol{f}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2, & \boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_3|}\boldsymbol{f}_3,\\
&\vdots & &\vdots\\
\boldsymbol{f}_k &= \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_k &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_k|}\boldsymbol{f}_k,
\end{aligned}
$$

até $k = n$. Usando a última equação acima, e o fato de que $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_l = \delta_{il}$ para i e l entre 1 e $k-1$, mostre que

$$\boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{e}_l = 0, \forall l \in \{1, 2, \ldots, k-1\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) &= \left(\left[\boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i\right] \cdot \boldsymbol{e}_l\right)\\
&= (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_i)\underbrace{(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_l)}_{\delta_{il}}\\
&= (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) - (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) = 0 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Sabendo que

$$\int x^2 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^3}\left[\left(k^2x^2 - 2kx + 2\right)\mathrm{e}^{kx}\right],$$

a) [10] obtenha a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = x^2, \qquad 0 \le x \le 1;$$

b) [15] agora utilize a igualdade de Parseval,

$$\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

para obter o valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^4 n^4}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2ni\pi x}{L}};\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2ni\pi x}{L}} f(x)\,\mathrm{d}x;\\
a &= 0,\\
b &= 1,\\
L &= b - a = 1;\\
c_n &= \frac{1}{1}\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-\frac{2ni\pi x}{1}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(k^2 - 2k + 2)\mathrm{e}^k}{k^3} - \frac{2}{k^3};\\
k &= -2\pi \mathrm{i} n \Rightarrow \mathrm{e}^k = 1;\\
c_n &= \frac{(-2\pi n\mathrm{i})^2 - 2(-2\pi n\mathrm{i})}{(-2\pi n\mathrm{i})^3}\\
&= \frac{4\pi^2 n^2 \mathrm{i}^2 + 4\pi n\mathrm{i}}{-8\pi^3 n^3 \mathrm{i}^3}\\
&= \frac{\pi^2 n^2 \mathrm{i}^2 + \pi n\mathrm{i}}{2\pi^3 n^3 \mathrm{i}}\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2\pi n} + \frac{1}{2\pi^2 n^2}, \qquad n \ne 0.
\end{aligned}$$

Claramente, o cálculo de c_0 precisa ser feito separadamente:

$$c_0 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Continue a solução no verso ⟹

Para obter a igualdade de Parseval neste caso,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^4 \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{5}; \\
|c_0|^2 &= \frac{1}{9}; \\
|c_n|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 n^2} + \frac{1}{4\pi^4 n^4}; \\
\frac{1}{5} &= \frac{1}{9} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2} + \frac{1}{4\pi^4 n^4} \\
\frac{4}{45} &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2} + \frac{1}{4\pi^4 n^4} \\
\frac{16}{45} &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^4 n^4} \\
\frac{16}{45} &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^4 n^4} \\
\frac{8}{45} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^4 n^4} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Obtenha a transformada de Fourier de

$$f(x) = x^2 e^{-|x|},$$

sabendo que

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-|x|} \cos(bx)\,dx = -\frac{2(3b^2-1)}{(b^2+1)^3}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Note que $f(x)$ é uma função par.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\left[\cos(kx) - i\,\mathrm{sen}(kx)\right]\,dx \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\cos(kx)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\frac{2(3k^2-1)}{(k^2+1)^3}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03A, 29 set 2023
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ________________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Sabendo que

$$
\frac{a^2}{x^2+a^2} \Leftrightarrow \frac{a}{2}\mathrm{e}^{-|ka|}
$$

formam um par de transformada-antitransformada de Fourier, encontre

$$
\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{a^2}{4}\mathrm{e}^{-2|ka|}\right\}.
$$

Deixe sua resposta na forma de uma integral de convolução.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{f*f\right\} &= 2\pi\widehat{f}(k)\widehat{f}(k),\\
\mathscr{F}^{-1}\left\{[\widehat{f}(k)]^2\right\} &= \frac{1}{2\pi}f*f,\\
\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{a^2}{4}\mathrm{e}^{-2|ka|}\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{a^2}{\xi^2+a^2}\right]\left[\frac{a^2}{(x-\xi)^2+a^2}\right]\mathrm{d}\xi \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4+3i \\ 1-i & 2 & 3 \\ 1+i & i & 3 \end{bmatrix},$$

obtenha a matriz adjunta $[A^{\#}]$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$[A^{\#}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4-3i \\ 1+i & 2 & 3 \\ 1-i & -i & 3 \end{bmatrix}^{\top}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & 2 & -i \\ 4-3i & 3 & 3 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Obtenha a função de Green do problema

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}, \qquad y(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + \frac{y}{\xi} &= \frac{f(\xi)}{\xi},\\
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)y}{\xi} &= \frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi},\\
\int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{G(x,\xi)y}{\xi}\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi,\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_0^{\infty} - \int_{\xi=0}^{\infty} y\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{G(x,\xi)y}{\xi}\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi}
\end{aligned}$$

Nesse ponto, como sempre, imponho $\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0$; note que a condição inicial é $y(0) = 0$, o que simplifica um pouco as coisas. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
\int_{\xi=0}^{\infty} y\left[-\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\right]\mathrm{d}\xi &= \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi,\\
-\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi} &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}$$

A forma mais rápida de obter G é pelo método da variação das constantes. Procuro a solução da equação homogênea:

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} + \frac{h}{\xi} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{h}{\xi},\\
\frac{\mathrm{d}h}{h} &= \frac{d\xi}{\xi},\\
h(\xi) &= A\xi,
\end{aligned}$$

(onde A é uma constante em relação a ξ), e tento

$$\begin{aligned}
G(x,\xi) &= A(x,\xi)\xi,\\
-\left[\xi\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi} + A\right] + \frac{A\xi}{\xi} &= \delta(\xi - x),\\
-\xi\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x),\\
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{\delta(\xi - x)}{\xi},\\
\int_{u=0}^{\xi} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u &= -\int_{u=0}^{\xi} \frac{\delta(u - x)}{u}\,\mathrm{d}u\\
A(x,\xi) &= A(x,0) - \frac{H(\xi - x)}{x},\\
G(x,\xi) &= \left[A(x,0) - \frac{H(\xi - x)}{x}\right]\xi.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
0 = G(x,\infty) = [A(x,0) - 1/x]\,\infty \qquad &\Rightarrow\\
A(x,0) = 1/x,&\\
G(x,\xi) = [1 - H(\xi - x)]\frac{\xi}{x}\ \blacksquare&
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] As raízes da equação característica de uma EDO de coeficientes constantes, homogênea, de ordem 2, são

$$
\begin{aligned}
r_1 &= -1 + 2\sqrt{\lambda},\\
r_2 &= -1 - 2\sqrt{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Escreva a EDO na forma de uma equação diferencial de Sturm-Liouville, onde λ é o autovalor. Observação: por uma questão de consistência com a Teoria de Sturm-Liouville, a função-peso $w(x)$ que multiplica λy na Equação de Sturm-Liouville deve ser positiva.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação característica é

$$(r - (-1 + 2\sqrt{\lambda}))(r - (-1 - 2\sqrt{\lambda})) = r^2 + 2r + 1 - 4\lambda.$$

A equação diferencial é

$$
\begin{aligned}
0 = y'' + 2y' + (1 - 4\lambda)y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)y + \lambda w(x)y,\\
0 = y'' + 2y' + (1 - 4\lambda)y &= py'' + p'y' + qy + \lambda wy,\\
0 = -\frac{1}{4}y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y + \lambda y &= \frac{p}{w}y'' + \frac{p'}{w}y' + \frac{q}{w}y + \lambda y
\end{aligned}
$$

Obtemos um conjunto de 3 equações diferenciais:

$$
\begin{aligned}
\frac{q}{w} &= -\frac{1}{4},\\
\frac{p'}{w} &= -\frac{1}{2},\\
\frac{p}{w} &= -\frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

donde $p = q$, e

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{2}w = \frac{1}{2} \times 4p = 2p,\\
\frac{dp}{p} &= 2dx,\\
p(x) &= C\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}
$$

A constante C é totalmente arbitrária, exceto pelo seu sinal que deve ser escolhido de tal forma que $w > 0$. Sem perda de generalidade, portanto, faça $C = -1$. Então, $w = 4\mathrm{e}^{2x}$, e a equação de Sturm Liouville é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\mathrm{e}^{2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \mathrm{e}^{2x}y + 4\mathrm{e}^{2x}\lambda y = 0 \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03B, 06 out 2023
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Mostre que

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right\} = \frac{1}{2}\left[H(k+1) - H(k-1)\right].$$

Sugestões (fatos você pode usar sem demonstrar):

a)

$$\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} \text{ é par } \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\cos(kx)\,\mathrm{d}x.$$

b)

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(a+b) &= \mathrm{sen}(a)\cos(b) + \mathrm{sen}(b)\cos(a),\\ \mathrm{sen}(a-b) &= \mathrm{sen}(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(b)\cos(a),\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}(a+b) + \mathrm{sen}(a-b)\right] = \mathrm{sen}(a)\cos(b).$$

Agora faça $a = x$, $b = kx$ na integral da transformada.

c) Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}(cx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \begin{cases}0, & c = 0,\\ +\pi & c > 0,\\ -\pi & c < 0,\end{cases}\\ &= \pi(2H(c) - 1),\end{aligned}$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside, e $H(0) = 1/2$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2x}\left[\mathrm{sen}(x+kx) + \mathrm{sen}(x-kx)\right]\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2x}\left[\mathrm{sen}(kx+x) - \mathrm{sen}(kx-x)\right]\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2x}\left[\mathrm{sen}((k+1)x) - \mathrm{sen}((k-1)x)\right]\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}((k+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}((k-1)x)}{x}\,\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\pi(2H(k+1)-1) - \pi(2H(k-1)-1)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[H(k+1) - H(k-1)\right] \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Usando a desigualdade de Schwarz e o produto interno usual no espaço das funções complexas quadrado-integráveis, e supondo que todas as integrais convergem, mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi||f(\xi)| \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right| \mathrm{d}\xi \le \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |f(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|^2 \mathrm{d}\xi\right]^{1/2}$$

onde $\xi \in \mathbb{R}$ e $f(\xi) \in \mathbb{C}$. As funções que devem ser utilizadas na desigualdade de Schwarz são $u(x) = |\xi f(\xi)|$ e $v(x) = |\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi|$. **Mostre todos os passos. Não omita nenhum detalhe.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A desigualdade de Schwarz é

$$\begin{aligned}
|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| &\le \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}\sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle};\\
u(\xi) &= |\xi f(\xi)|\,;\\
v(\xi) &= \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|;\\
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x)u(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} v^*(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2},\\
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi f(\xi)| \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right| \mathrm{d}x\right| &\le \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi f(\xi)|^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2},\\
\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|\,|f(\xi)| \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right| \mathrm{d}x &\le \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\,|f(\xi)|^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Ache a função de Green do problema

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = \operatorname{sen}(x), \quad y(0) = 3.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Multiplico por $G(x, \xi)$ e integro de 0 a infinito:

$$\int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi) \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - 2\xi y \right] \mathrm{d}\xi = \int_{0}^{\infty} G(x,\xi) \operatorname{sen} \xi \, \mathrm{d}\xi$$

Integrando por partes,

$$G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\infty} + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi) \left[-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G \right] \mathrm{d}\xi = \int_{0}^{\infty} G(x,\xi) \operatorname{sen} \xi \, \mathrm{d}\xi$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) &= 0 \Rightarrow \\
-G(x,0)y(0) + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi) \left[-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G \right] \mathrm{d}\xi &= \int_{0}^{\infty} G(x,\xi) \operatorname{sen} \xi \, \mathrm{d}\xi \\
-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G &= \delta(\xi - x). \\
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + 2\xi G &= -\delta(\xi - x).
\end{aligned}$$

Agora, $G = uv$, e

$$\begin{aligned}
u \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + 2\xi v \right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\delta(\xi - x) \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} &= -2\xi v \\
\frac{dv}{2v} &= -2\xi \\
\ln\left(\frac{v}{v_0(x)}\right) &= -\xi^2 \\
v &= v_0(x)\exp(-\xi^2) \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{\exp(\xi^2)}{v_0(x)}\delta(\xi - x) \\
u(\xi) &= u_0(x) - \int_{\eta=0}^{\xi} \frac{\exp(\eta^2)}{v_0(x)}\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta \\
&= u_0(x) - \frac{H(\xi - x)\exp(x^2)}{v_0(x)} \Rightarrow \\
G(x,\xi) &= \left[u_0(x)v_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2) \\
&= \left[G_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2).
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0 &\Rightarrow G_0(x) = \exp(x^2) \\
G(x,\xi) &= [1 - H(\xi - x)]\exp(x^2 - \xi^2) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Encontre os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$y'' + 4y' + (4 - 9\lambda)y = 0, \qquad y(0) = y(L) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se $\lambda > 0$:

$$y(x) = c_1 e^{(-2+3\sqrt{\lambda})x} + c_2 e^{(-2-3\sqrt{\lambda})x}.$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 e^{(-2+3\sqrt{\lambda})L} + c_2 e^{(-2-3\sqrt{\lambda})L} &= 0, \end{aligned}$$

donde $c_1 = c_2 = 0$, e $\lambda > 0$ não é autovalor.
Se $\lambda = 0$:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}.$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 L e^{-2L} &= 0, \end{aligned}$$

donde $c_1 = c_2 = 0$, e $\lambda = 0$ não é autovalor.
Se $\lambda < 0$:

$$y(x) = e^{-2x}\left(c_1 \operatorname{sen}(3\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(3\sqrt{-\lambda}x)\right).$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_2 &= 0, \\ e^{-2L} c_1 \operatorname{sen}(3\sqrt{-\lambda}L) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 3\sqrt{-\lambda}L &= n\pi, \\ \lambda_n &= -\frac{\pi^2 n^2}{9L^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

As autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = e^{-2x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 17 nov 2023
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [40] Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \mathrm{e}^{-x}y(x) + \lambda\mathrm{e}^{-x}y(x) = 0, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

a) [10] Qual é o intervalo dos valores possíveis de λ?

b) [10] Obtenha os autovalores λ_n.

c) [10] Obtenha as autofunções y_n.

d) [10] Prove que $\langle y_m(x), y_n(x)\rangle = 0,\ m \neq n$, ou seja: que as autofunções são ortogonais. **Observação:** você vai precisar de

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b),\\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Inicialmente, note que $p(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $q(x) = \mathrm{e}^{-x}$ e $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$. A EDO é

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-x}(1+\lambda)\,y(x) &= 0;\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1+\lambda)\,y(x) &= 0.\end{aligned}$$

A equação característica é

$$\begin{aligned}r^2 - r + (1+\lambda) &= 0;\\ r &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1+\lambda)}}{2}\end{aligned}$$

Inicialmente, suponha $r \in \mathbb{R}$; então,

$$\begin{aligned}1 - 4(1+\lambda) &\geq 0,\\ 4(1+\lambda) &\leq 1,\\ 1+\lambda &\leq \frac{1}{4},\\ \lambda &\leq -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Se $\lambda = -3/4$, temos 2 raízes repetidas $r = 1/2$, e

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{x/2} + c_2x\mathrm{e}^{x/2}.$$

com

$$\begin{aligned}y(0) = 0\ &\Rightarrow c_1 = 0;\\ y(1) = 0\ &\Rightarrow c_2 = 0.\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Logo, $y(x) \equiv 0$, e $\lambda = -3/4$ não pode ser autovalor.
Se $\lambda < -3/4$, faça

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1/2 > 0,\\
\beta &= \frac{\sqrt{1-4(1+\lambda)}}{2} > 0;\\
y(x) &= e^{x/2}\left[A\cosh(\beta x) + B\,\mathrm{senh}(\beta x)\right];\\
y(0) &= 0 \;\Rightarrow A = 0;\\
y(1) &= 0 \;\Rightarrow e^{1/2} B\,\mathrm{senh}(\beta) = 0 \Rightarrow B = 0,\\
y(x) &\equiv 0,
\end{aligned}$$

e novamente λ não pode ser autovalor.
Finalmente, suponha $\lambda > -3/4$; então as raízes são complexas:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1/2 > 0,\\
\beta &= \frac{\sqrt{-\left[1-4(1+\lambda)\right]}}{2} > 0;\\
r &= \alpha \pm i\beta;\\
y(x) &= e^{x/2}\left[A\cos(\beta x) + B\,\mathrm{sen}(\beta x)\right];\\
y(0) &= 0 \;\Rightarrow A = 0;\\
y(1) &= 0 \;\Rightarrow e^{1/2} B\,\mathrm{sen}(\beta) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}(\beta) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, o intervalo de valores possíveis de λ é

$$\lambda > -3/4.$$

b) Como nós supusemos $\beta > 0$, devemos ter

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{\sqrt{-\left[1-4(1+\lambda_n)\right]}}{2} = n\pi, \qquad n = 1,2,3,\ldots\\
\frac{-\left[1-4(1+\lambda_n)\right]}{4} &= n^2\pi^2,\\
-\left[1-4(1+\lambda_n)\right] &= 4n^2\pi^2,\\
1-4(1+\lambda_n) &= -4n^2\pi^2,\\
-4(1+\lambda_n) &= -1-4n^2\pi^2,\\
(1+\lambda_n) &= \frac{1+4n^2\pi^2}{4},\\
\lambda_n &= \frac{-3+4n^2\pi^2}{4}, \qquad n = 1,2,3,\ldots
\end{aligned}$$

c) As autofunções correspondentes são

$$y_n = e^{x/2}\,\mathrm{sen}(n\pi x) \blacksquare$$

d) Dadas duas autofunções $y_m(x)$ e $y_n(x)$, o produto interno com $w(x) = e^{-x}$ é

$$\begin{aligned}
\langle y_m, y_n\rangle &= \int_0^1 y_m(x) y_n(x) w(x)\,dx\\
&= \int_0^1 e^{x/2}\,\mathrm{sen}(m\pi x)\, e^{x/2}\,\mathrm{sen}(n\pi x)\, e^{-x}\,dx\\
&= \int_0^1 \mathrm{sen}(m\pi x)\;\mathrm{sen}(n\pi x)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\cos((m-n)\pi x) - \cos((m+n)\pi x)\right]\,dx\\
&= \frac{1}{2(m-n)}\int_0^1 \cos((m-n)\pi x)\,(m-n)dx - \frac{1}{2(m+n)}\int_0^1 \cos((m+n)\pi x)\,(m+n)dx\\
&= \frac{1}{2(m-n)}\,\mathrm{sen}((m-n)\pi x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2(m+n)}\,\mathrm{sen}((m+n)\pi x)\Big|_0^1\\
&= \frac{1}{2(m-n)}\,\mathrm{sen}((m-n)\pi) - \frac{1}{2(m+n)}\,\mathrm{sen}((m+n)\pi) = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30] Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{f(x)\}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} f(x)[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+1} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(pois } f \text{ é par)} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+1} [1 - x]\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \times \frac{1 - \cos(k)}{k^2} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [30] **Utilizando o método das características**, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{e}^t \frac{\partial \phi}{\partial x} = x, \qquad \phi(x,0) = f(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $\phi(x,t) = F(s)$ sobre $x = X(s)$ e $t = T(s)$:

$$\begin{aligned}
\phi(X(s),T(s)) &= F(s);\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s};\\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1 \Rightarrow T(s) = \underbrace{T(0)}_{\equiv 0} + s,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^s,\\
\int_{X(0)}^{X(s)} \mathrm{d}\xi &= \int_0^s \mathrm{e}^\tau \,\mathrm{d}\tau,\\
X(s) - X(0) &= \mathrm{e}^s - 1 \Rightarrow X(0) = X(s) + 1 - \mathrm{e}^s.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{e}^t \frac{\partial \phi}{\partial x} &= x,\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= X(0) + \mathrm{e}^s - 1,\\
F(s) - F(0) &= \int_{\tau=0}^{s} \left[X(0) + \mathrm{e}^\tau - 1\right] \,\mathrm{d}\tau\\
F(s) &= F(0) + (X(0) - 1)s + (\mathrm{e}^s - 1)\\
F(0) &= f(X(0)) = f(x + 1 - \mathrm{e}^t);\\
\phi(x,t) &= F(s) = f(x + 1 - \mathrm{e}^t) + (x + 1 - \mathrm{e}^t - 1)t + (\mathrm{e}^t - 1)\\
\phi(x,t) &= f(x + 1 - \mathrm{e}^t) + (x - \mathrm{e}^t)t + (\mathrm{e}^t - 1) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04B, 24 nov 2023
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Mostre que a integral que surge em problemas de Sturm-Liouville,

$$\int_a^b f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

onde f e g são funções complexas quadrado-integráveis de uma variável real, e $w(x) > 0$ é uma função real, definem um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

(i)

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_a^b f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\int_a^b f(x)g^*(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right]^*\\ &= \left[\int_a^b g^*(x)f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right]^* = \langle g, f\rangle^*\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\langle f, g+h\rangle &= \int_a^b f^*(x)[g(x)+h(x)]w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^*(x)h(x)w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle\,.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\langle f, \alpha g\rangle &= \int_a^b f^*(x)\alpha g(x)w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha\left[\int_a^b f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right]\\ &= \alpha\,\langle f, g\rangle\,.\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= \int_a^b f^*(x)f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,\mathrm{d}x > 0,\end{aligned}$$

desde que $f(x)$ seja nula no máximo em um conjunto enumerável de pontos dentro de $[a,b]$, ou seja, desde que "$f(x) \not\equiv 0$" em $[a,b]$.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

(v)

$$f(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_a^b f^*(x)f(x)w(x)\,\mathrm{d}x = 0 \;\blacksquare$$

A rigor, esta última deve ser lida: se $f(x)$ for nula exceto em um conjunto enumerável de pontos dentro de $[a,b]$, então a integral é nula.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Se $f(x) = (x - 1/2)^2,\ 0 \le x \le 1$, então pode-se mostrar que

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n x} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi^2 n^2},\ n \ne 0.$$

Calcule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Sugestão: use a igualdade de Parseval para séries de Fourier complexas,

$$\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Inicialmente, note que a integral não vale para $n = 0$; mas

$$c_0 = \int_0^1 (x-1/2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}.$$

Em seguida, note também que a integral é na verdade o coeficiente de Fourier complexo de $f(x)$ para $n \ne 0$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} f(x)\,\mathrm{d}x;\\
a &= 0,\\
b &= 1,\\
L &= b - a = 1,\\
c_n &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n x} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi^2 n^2}.
\end{aligned}$$

Agora, a identidade de Parseval para os coeficientes da série de Fourier complexa é

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2;\\
\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2;\\
\int_0^1 [(x-1/2)^2]^2\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2;\\
\frac{1}{80} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2\\
\frac{1}{80} &= \left[\frac{1}{12}\right]^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2\\
\frac{1}{80} - \frac{1}{144} &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi^2 n^2}\right]^2\\
\frac{1}{180} &= \frac{2}{4\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\\
\frac{1}{180} &= \frac{1}{2\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\\
\frac{\pi^4}{90} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Sabendo que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2}\left[H(k+1) - H(k-1)\right],$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{\pi(k^2+1)},$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside, calcule

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x-\xi)}{x-\xi} e^{-|\xi|}\,d\xi\,dx.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Trata-se da transformada de Fourier da convolução de $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ com $g(x) = e^{-x}$; mas pelo teorema da convolução,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[f * g\right](x) &= 2\pi\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)\\ &= \frac{H(k+1) - H(k-1)}{k^2+1} \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Resolva

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= 0, \qquad 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b;\\
\frac{\partial\phi(0,y)}{\partial x} &= 0, \qquad 0 \le y \le b,\\
\frac{\partial\phi(a,y)}{\partial x} &= 0, \qquad 0 \le y \le b,\\
\phi(x,0) &= 0, \qquad 0 \le x \le a,\\
\phi(x,b) &= \phi_0, \qquad 0 \le x \le a.
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$; então,

$$\begin{aligned}
Y\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + X\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= 0,\\
\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= 0,\\
\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= \lambda.
\end{aligned}$$

Claramente as condições de contorno homogênas que já estão “prontas” são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(0,y)}{\partial x} &= 0, \qquad 0 \le y \le b,\\
\frac{\partial\phi(a,y)}{\partial x} &= 0, \qquad 0 \le y \le b,
\end{aligned}$$

e correspondem a $x = 0$ e $x = a$. Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(0,y)}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}X(0)}{\mathrm{d}x}Y(y),\\
\frac{\partial\phi(a,y)}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}X(a)}{\mathrm{d}x}Y(y);
\end{aligned}$$

portanto, devemos resolver o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} - \lambda X = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}X(0)}{\mathrm{d}x} = 0,\ \frac{\mathrm{d}X(a)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Se $\lambda = +k^2 > 0$ com $k > 0$ (sem perda de generalidade),

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} - k^2X &= 0,\\
r^2 - k^2 &= 0,\\
r &= \pm k,\\
X(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx),\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cosh(kx),\\
\frac{\mathrm{d}X(0)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow B\cosh(0) = 0 \Rightarrow B = 0;\\
\frac{\mathrm{d}X(a)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow A\,\mathrm{senh}(ka) = 0 \Rightarrow A = 0,
\end{aligned}$$

e $\lambda > 0$ não pode ser autovalor.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Se $\lambda = 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} &= 0,\\
X(x) &= Ax + B,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= A,\\
\frac{\mathrm{d}X(0)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow A = 0;\\
\frac{\mathrm{d}X(a)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow A = 0,
\end{aligned}
$$

e B pode ser qualquer. Consequentemente, $\lambda = 0$ *é* um autovalor da autofunção $X_0(x) = B$, e sem perda de generalidade podemos usar o caso $X_0(x) = 1$.
Se $\lambda = -k^2 < 0$ com $k > 0$ (sem perda de generalidade),

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} + k^2 X &= 0,\\
r^2 + k^2 &= 0,\\
r &= \pm k\mathrm{i},\\
X(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= k[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)],\\
\frac{\mathrm{d}X(0)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow kB = 0 \Rightarrow B = 0,\\
\frac{\mathrm{d}X(a)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow -kA\,\mathrm{sen}(ka) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}(ka) = 0,\\
ka &= n\pi,\\
k_n &= \frac{n\pi}{a},\\
X_n(x) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right),
\end{aligned}
$$

com $A = 1$ (sem perda de generalidade).
Procuremos as soluções $Y_n(y)$ associadas. Para $n > 0$,

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}^2 Y_n}{\mathrm{d}y^2} &= \lambda_n Y,\\
-\frac{\mathrm{d}^2 Y_n}{\mathrm{d}y^2} &= -\frac{n^2\pi^2}{a^2} Y,\\
\frac{\mathrm{d}^2 Y_n}{\mathrm{d}y^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y &= 0,\\
Y_n(y) &= A_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi - y}{a}\right),\ n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Para $n = 0$, $\lambda = 0$ e

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 Y_0}{\mathrm{d}y^2} &= 0,\\
Y_0(y) &= A_0 + B_0 y.
\end{aligned}
$$

A solução geral é da forma

$$
\phi(x,y) = A_0 + B_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right].
$$

com

$$
\begin{aligned}
\phi(x,0) &= 0, \qquad 0 \leq x \leq a,\\
\phi(x,b) &= \phi_0, \qquad 0 \leq x \leq a.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Então,

$$\phi(x,0) = 0 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)[A_n] \ \Leftrightarrow A_n = 0, \forall n;$$
$$\phi(x,b) = \phi_0 = B_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right];$$
$$\phi_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = B_0 b \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right);$$
$$\int_0^a \phi_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x = B_0 b \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Analisemos os valores de m separadamente. Para $m > 0$,

$$\int_0^a \phi_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x = B_0 b \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x + B_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\frac{a}{2};$$
$$\int_0^a \phi_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right) \neq 0,$$

donde $B_m = 0$. Por outro lado, se $m = 0$,

$$\int_0^a \phi_0\,\mathrm{d}x = B_0 b \int_0^a \mathrm{d}x,$$
$$\phi_0 a = B_0 b a,$$
$$B_0 = \frac{\phi_0}{b}.$$

A solução final portanto será

$$\phi(x,y) = \phi_0 \frac{y}{b} \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FA, 6 dez 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Transformada de Laplace: sabendo que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{ e^{at} f(t) \right\} &= \overline{f}(s-a),\\
(s+a)^2 &= s^2 + 2as + a^2,\\
(s+a)^3 &= s^3 + 3a^2 s + 3as^2 + a^3,
\end{aligned}
$$

calcule

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{2s^2 + 4as + 2a^2 + b^2}{s^3 + 3as^2 + 3a^2 s + a^3 + b^2(s+a)} \right\}.
$$

É **muito útil** fazer uma decomposição do tipo

$$
\frac{2A^2 + B^2}{A(A^2+B^2)} = \frac{A^2}{A(A^2+B^2)} + \frac{A^2+B^2}{A(A^2+B^2)}.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(s) &= \frac{2(s^2 + 4as + 2a^2) + b^2}{s^3 + 3as^2 + 3a^2 s + a^3 + b^2(s+a)}\\
&= \frac{2(s+a)^2 + b^2}{(s+a)^3 + b^2(s+a)}\\
&= \frac{2(s+a)^2 + b^2}{(s+a)[(s+a)^2 + b^2]}\\
&= \frac{(s+a)^2}{(s+a)[(s+a)^2 + b^2]} + \frac{(s+a)^2 + b^2}{(s+a)[(s+a)^2 + b^2]}\\
&= \frac{(s+a)}{(s+a)^2 + b^2} + \frac{1}{s+a}\\
&= \mathscr{L}\left\{ e^{-at}\cos(bt) \right\} + \mathscr{L}\left\{ e^{-at} \right\} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{2s^2 + 4as + 2a^2 + b^2}{s^3 + 3as^2 + 3a^2 s + a^3 + b^2(s+a)} \right\} = e^{-at}\cos(bt) + e^{-at} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Calcule **por integração direta** a transformada de Laplace de $\mathrm{e}^t\delta(t-b)$, onde $b>0$ e $\delta(\cdot)$ é a delta de Dirac.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^t\delta(t-b)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(-s+1)t}\delta(t-b)\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{(-s+1)b} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções **reais**, quadrado-integráveis, de uma variável real x no intervalo $[0,1]$, **verifique** se

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^1 f(x)g(x)x\,\mathrm{d}x$$

é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Neste caso, temos

$$\begin{aligned}\langle\,,\rangle : \mathbb{V}\times\mathbb{V} &\to \mathbb{R}\\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\mapsto \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle &= \langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle\,,\\ \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\rangle &= \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle\,,\\ \langle\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}\rangle &= \alpha\,\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\,,\\ \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle &> 0,\ \ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\\ \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle &= 0,\ \ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_0^1 f(x)g(x)x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 g(x)f(x)x\,\mathrm{d}x = \langle g,f\rangle\,;\checkmark\\ \langle f,g+h\rangle &= \int_0^1 f(x)[g(x)+h(x)]x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 f(x)g(x)x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)h(x)x\,\mathrm{d}x = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle\,;\checkmark\\ \langle f,\alpha g\rangle &= \int_0^1 f(x)[\alpha g(x)]x\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha\int_0^1 f(x)g(x)x\,\mathrm{d}x = \alpha\,\langle f,g\rangle\,;\checkmark\end{aligned}$$

Agora devemos ter o cuidado de definir o que $f=0$ e $f\neq 0$ signficam em termos do vetor f: dizemos que $f=0$ se $f(x)\neq 0$ no máximo em um conjunto **enumerável** de pontos em $[0,1]$; caso contrário, $f\neq 0$. Então,

$$\begin{aligned}&f(x)\neq 0 \text{ em } [0,1]\ \Rightarrow\\ &\langle f,f\rangle = \int_0^1 f(x)f(x)x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)x\,\mathrm{d}x > 0;\checkmark\\ &f(x)=0 \text{ em } [0,1]\ \Rightarrow\\ &\langle f,f\rangle = \int_0^1 f(x)f(x)x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)x\,\mathrm{d}x = 0;\checkmark\end{aligned}$$

e portanto $\langle f,g\rangle$ é um produto interno legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= 0, \qquad 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b;\\
\frac{\partial\phi(0,y)}{\partial x} &= 0, \qquad 0 \le y \le b,\\
\frac{\partial\phi(a,y)}{\partial x} &= 0, \qquad 0 \le y \le b,\\
\phi(x,0) &= 0, \qquad 0 \le x \le a,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), \qquad 0 \le x \le a.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$; então,

$$
\begin{aligned}
Y\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + X\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= 0,\\
\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= 0,\\
\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Claramente as condições de contorno homogênas que já estão "prontas" são

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(0,y)}{\partial x} &= 0, \qquad 0 \le y \le b,\\
\frac{\partial\phi(a,y)}{\partial x} &= 0, \qquad 0 \le y \le b,
\end{aligned}
$$

e correspondem a $x = 0$ e $x = a$. Mas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(0,y)}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}X(0)}{\mathrm{d}x}Y(y),\\
\frac{\partial\phi(a,y)}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}X(a)}{\mathrm{d}x}Y(y);
\end{aligned}
$$

portanto, devemos resolver o problema de Sturm-Liouville

$$
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} - \lambda X = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}X(0)}{\mathrm{d}x} = 0,\ \frac{\mathrm{d}X(a)}{\mathrm{d}x} = 0.
$$

Se $\lambda = +k^2 > 0$ com $k > 0$ (sem perda de generalidade),

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} - k^2X &= 0,\\
r^2 - k^2 &= 0,\\
r &= \pm k,\\
X(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx),\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cosh(kx),\\
\frac{\mathrm{d}X(0)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow B\cosh(0) = 0 \Rightarrow B = 0;\\
\frac{\mathrm{d}X(a)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow A\,\mathrm{senh}(ka) = 0 \Rightarrow A = 0,
\end{aligned}
$$

e $\lambda > 0$ não pode ser autovalor.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Se $\lambda = 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} &= 0,\\
X(x) &= Ax + B,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= A,\\
\frac{\mathrm{d}X(0)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow A = 0;\\
\frac{\mathrm{d}X(a)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow A = 0,
\end{aligned}
$$

e B pode ser qualquer. Consequentemente, $\lambda = 0$ *é* um autovalor da autofunção $X_0(x) = B$, e sem perda de generalidade podemos usar o caso $X_0(x) = 1$.
Se $\lambda = -k^2 < 0$ com $k > 0$ (sem perda de generalidade),

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} + k^2X &= 0,\\
r^2 + k^2 &= 0,\\
r &= \pm k\mathrm{i},\\
X(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= k[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)],\\
\frac{\mathrm{d}X(0)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow kB = 0 \Rightarrow B = 0,\\
\frac{\mathrm{d}X(a)}{\mathrm{d}x} &= 0 \Rightarrow -kA\,\mathrm{sen}(ka) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}(ka) = 0,\\
ka &= n\pi,\\
k_n &= \frac{n\pi}{a},\\
X_n(x) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right),
\end{aligned}
$$

com $A = 1$ (sem perda de generalidade).
Procuremos as soluções $Y_n(y)$ associadas. Para $n > 0$,

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}^2Y_n}{\mathrm{d}y^2} &= \lambda_n Y,\\
-\frac{\mathrm{d}^2Y_n}{\mathrm{d}y^2} &= -\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y,\\
\frac{\mathrm{d}^2Y_n}{\mathrm{d}y^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y &= 0,\\
Y_n(y) &= A_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi - y}{a}\right),\ \ n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Para $n = 0$, $\lambda = 0$ e

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2Y_0}{\mathrm{d}y^2} &= 0,\\
Y_0(y) &= A_0 + B_0y.
\end{aligned}
$$

A solução geral é da forma

$$
\phi(x,y) = A_0 + B_0y + \sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[A_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right].
$$

com

$$
\begin{aligned}
\phi(x,0) &= 0, \qquad 0 \leq x \leq a,\\
\phi(x,b) &= \phi_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), \qquad 0 \leq x \leq a.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Então,

$$\phi(x,0) = 0 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)[A_n] \iff A_n = 0, \forall n;$$

$$\phi(x,b) = \phi_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) = B_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right];$$

$$\phi_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = B_0 b \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right);$$

$$\int_0^a \phi_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x = B_0 b \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x.$$

Analisemos os valores de m separadamente. Para $m = 0$,

$$0 = \int_0^a \phi_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x = B_0 b \int_0^a \mathrm{d}x = B_0 b a; \implies B_0 = 0.$$

Para $m = 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^a \phi_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x \\
&= B_1 \operatorname{senh}\left(\frac{\pi b}{a}\right)\int_0^a \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x; \\
\phi_0 &= B_1 \operatorname{senh}\left(\frac{\pi b}{a}\right), \\
\frac{\phi_0}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi b}{a}\right)} &= B_1.
\end{aligned}$$

Para $m > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^a \phi_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x \\
0 &= B_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\int_0^a \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x \implies \\
0 &= B_m.
\end{aligned}$$

A solução portanto será

$$\phi(x,y) = \frac{\phi_0}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi b}{a}\right)}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{a}\right) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FB, 8 dez 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Mostre que o esquema de diferenças finitas (para resolver a equação da onda cinemática)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

é incondicionalmente instável.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)\\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{n+1} &= \epsilon_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n\right),\\ \epsilon_i^n &= \sum_{l=1}^{N/2} \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} \quad\Rightarrow\\ \xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right); \end{aligned}$$

eliminando o fator comum $\xi_l \mathrm{e}^{at_n+\mathrm{i}k_l i\Delta x}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)\\ &= 1 - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}\,k_l\Delta x. \end{aligned}$$

Mas

$$\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right| = \sqrt{1 + \mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(k_l\Delta x)} > 1 \qquad \text{sempre,}$$

e o esquema é incondicionalmente instável ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Dada a equação diferencial parcial

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} &= -kc,\\
c(x,0) &= 0,\\
c(0,t) &= c_0,
\end{aligned}
$$

onde u, k e c_0 são constantes positivas, calcule a sua transformada de Laplace (em t) e obtenha uma equação diferencial ordinária para $\overline{c}(x,s)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\frac{\partial c}{\partial t}\right\} &= s\overline{c}(x,s) - c(x,0) = s\overline{c}(x,s);\\
\mathscr{L}\left\{u\frac{\partial c}{\partial x}\right\} &= u\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x};\\
\mathscr{L}\left\{-kc\right\} &= -k\overline{c}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a EDO é

$$
\begin{aligned}
s\overline{c} + u\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x} &= -k\overline{c},\\
(s+k)\overline{c} + u\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x} &= 0.
\end{aligned}
$$

A condição inicial é

$$
\begin{aligned}
\overline{c}(0,s) &= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} c(0,t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} c_0\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{c_0}{s}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Sabendo que

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}},$$

Calcule a transformada de Fourier de $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-x^2}}_{\text{par}}[\underbrace{\cos(kx)}_{\text{par}} - \mathrm{i}\underbrace{\mathrm{sen}(kx)}_{\text{ímpar}}]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4}} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + 2\lambda\mathrm{e}^{-x}y(x) = 0, \qquad y'(0) = 0,\ y'(1) = 0.$$

Obtenha os autovalores e as autofunções associados.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Inicialmente, note que $p(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $q(x) = 0$, e $w(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$. A EDO é

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\lambda\mathrm{e}^{-x}y &= 0,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\lambda y &= 0.\end{aligned}$$

A equação característica é

$$\begin{aligned}r^2 - r + 2\lambda &= 0;\\ r &= \frac{1 \pm \sqrt{1-8\lambda}}{2}.\end{aligned}$$

Para que as raízes sejam reais, devemos ter

$$\begin{aligned}1 - 8\lambda &\geq 0,\\ 1 &\geq 8\lambda,\\ \lambda &\leq \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Se $\lambda = 1/8$, $r = 1/2$ é uma raiz dupla:

$$\begin{aligned}y(x) &= c_1\mathrm{e}^{x/2} + c_2x\mathrm{e}^{x/2},\\ y'(x) &= \frac{c_2x + 2c_2 + c_1}{2}\mathrm{e}^{x/2},\\ y'(0) &= \frac{1}{2}c_1 + c_2 = 0,\\ y'(1) &= \frac{1}{2}c_1\mathrm{e}^{1/2} + \frac{3}{2}c_2\mathrm{e}^{1/2} = 0,\end{aligned}$$

donde $c_1 = c_2 = 0$, e $\lambda = 1/8$ não é autovalor.
Se $\lambda < 1/8$, faça

$$\begin{aligned}\alpha &= 1/2 > 0,\\ \beta &= \frac{\sqrt{1-8\lambda}}{2} > 0;\\ y(x) &= \mathrm{e}^{\alpha x}\left[A\cosh(\beta x) + B\,\mathrm{senh}(\beta x)\right];\\ y'(x) &= \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\left[A\cosh(\beta x) + B\,\mathrm{senh}(\beta x)\right] + \beta\mathrm{e}^{\alpha x}\left[A\,\mathrm{senh}(\beta x) + B\cosh(\beta x)\right]\\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}\left[(\alpha A + \beta B)\cosh(\beta x) + (\alpha B + \beta A)\,\mathrm{senh}(\beta x)\right];\\ y'(0) &= \alpha A + \beta B = 0,\\ y'(1) &= \mathrm{e}^{\alpha}\left[\underbrace{(\alpha A + \beta B)}_{=0}\cosh(\beta) + (\alpha B + \beta A)\,\mathrm{senh}(\beta)\right] = 0.\end{aligned}$$

mas $\mathrm{e}^{\alpha} \neq 0$ e $\mathrm{senh}(\beta) \neq 0$, de modo que podemos simplificar para

$$\begin{aligned}\alpha A + \beta B &= 0,\\ \beta A + \alpha B &= 0;\end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Continue a solução no verso ⟹

Mas esse sistema admite solução não-nula quando o determinante é nulo, ou

$$\begin{aligned}\alpha^2 - \beta^2 &= 0,\\ \alpha^2 &= \beta^2,\\ \alpha &= \pm\beta.\end{aligned}$$

Por hipótese, $\alpha = 1/2 > 0$, e $\beta > 0$, donde $\alpha = \beta = 1/2$, e $\lambda = 0$ é autovalor. Neste caso, temos $B = -A$, e

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{x/2}[\cosh(x/2) - \operatorname{senh}(x/2)] \equiv 1$$

é uma autofunção! Note que $\lambda = 0$ é o *único* autovalor para a região $\lambda < 1/8$.
Prosseguindo, se $\lambda > 1/8$,

$$\begin{aligned}\alpha &= 1/2 > 0,\\ \beta &= \frac{\sqrt{8\lambda - 1}}{2},\\ y(x) &= \mathrm{e}^{\alpha x}\left[A\cos(\beta x) + B\operatorname{sen}(\beta x)\right],\\ y'(x) &= \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}\left[A\cos(\beta x) + B\operatorname{sen}(\beta x)\right] + \beta \mathrm{e}^{\alpha x}\left[-A\operatorname{sen}(\beta x) + B\cos(\beta x)\right]\\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}\left[(\alpha A + \beta B)\cos(\beta x) + (\alpha B - \beta A)\operatorname{sen}(\beta x)\right];\\ y'(0) &= 0 \;\Rightarrow (\alpha A + \beta B) = 0,\\ y'(1) &= 0 \;\Rightarrow \mathrm{e}^{\alpha}\left[(\alpha B - \beta A)\operatorname{sen}(\beta)\right] = 0\end{aligned}$$

Mas $\mathrm{e}^{\alpha} \neq 0$, donde

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta\operatorname{sen}(\beta) & \alpha\operatorname{sen}(\beta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

e o sistema admitirá soluções não-triviais se o determinante for nulo:

$$\begin{aligned}(\alpha^2 + \beta^2)\operatorname{sen}(\beta) &= 0,\\ \operatorname{sen}(\beta) &= 0,\\ \beta_n &= \frac{\sqrt{8\lambda_n - 1}}{2} = n\pi,\\ \frac{8\lambda_n - 1}{4} &= n^2\pi^2,\\ \lambda_n &= \frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}, \qquad n \geq 1.\end{aligned}$$

B depende de A segundo

$$B = -\frac{\alpha}{\beta}A,$$

de forma que as autofunções são

$$y_n(x) = \mathrm{e}^{x/2}\left[\cos(n\pi x) - \frac{1}{2n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\right], \qquad n \geq 1 \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹