TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 17 nov 2023
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [40] Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \mathrm{e}^{-x}y(x) + \lambda\mathrm{e}^{-x}y(x) = 0, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

a) [10] Qual é o intervalo dos valores possíveis de λ?

b) [10] Obtenha os autovalores λ_n.

c) [10] Obtenha as autofunções y_n.

d) [10] Prove que $\langle y_m(x), y_n(x)\rangle = 0,\ m \neq n$, ou seja: que as autofunções são ortogonais. **Observação:** você vai precisar de

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b),$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Inicialmente, note que $p(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $q(x) = \mathrm{e}^{-x}$ e $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$. A EDO é

$$\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-x}(1+\lambda)\,y(x) = 0;$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1+\lambda)\,y(x) = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 - r + (1+\lambda) = 0;$$
$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1+\lambda)}}{2}$$

Inicialmente, suponha $r \in \mathbb{R}$; então,

$$1 - 4(1+\lambda) \geq 0,$$
$$4(1+\lambda) \leq 1,$$
$$1+\lambda \leq \frac{1}{4},$$
$$\lambda \leq -\frac{3}{4}.$$

Se $\lambda = -3/4$, temos 2 raízes repetidas $r = 1/2$, e

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{x/2} + c_2x\mathrm{e}^{x/2}.$$

com

$$y(0) = 0 \ \Rightarrow c_1 = 0;$$
$$y(1) = 0 \ \Rightarrow c_2 = 0.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Logo, $y(x) \equiv 0$, e $\lambda = -3/4$ não pode ser autovalor.
Se $\lambda < -3/4$, faça

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 1/2 > 0,\\
\beta &= \frac{\sqrt{1-4(1+\lambda)}}{2} > 0;\\
y(x) &= \mathrm{e}^{x/2}\left[A\cosh(\beta x) + B\,\mathrm{senh}(\beta x)\right];\\
y(0) &= 0 \ \Rightarrow A = 0;\\
y(1) &= 0 \ \Rightarrow \mathrm{e}^{1/2}B\,\mathrm{senh}(\beta) = 0 \Rightarrow B = 0,\\
y(x) &\equiv 0,
\end{aligned}
$$

e novamente λ não pode ser autovalor.
Finalmente, suponha $\lambda > -3/4$; então as raízes são complexas:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 1/2 > 0,\\
\beta &= \frac{\sqrt{-\left[1-4(1+\lambda)\right]}}{2} > 0;\\
r &= \alpha \pm \mathrm{i}\beta;\\
y(x) &= \mathrm{e}^{x/2}\left[A\cos(\beta x) + B\,\mathrm{sen}(\beta x)\right];\\
y(0) &= 0 \ \Rightarrow A = 0;\\
y(1) &= 0 \ \Rightarrow \mathrm{e}^{1/2}B\,\mathrm{sen}(\beta) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}(\beta) = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, o intervalo de valores possíveis de λ é

$$\lambda > -3/4.$$

b) Como nós supusemos $\beta > 0$, devemos ter

$$
\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{\sqrt{-\left[1-4(1+\lambda_n)\right]}}{2} = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\\
\frac{-\left[1-4(1+\lambda_n)\right]}{4} &= n^2\pi^2,\\
-\left[1-4(1+\lambda_n)\right] &= 4n^2\pi^2,\\
1-4(1+\lambda_n) &= -4n^2\pi^2,\\
-4(1+\lambda_n) &= -1-4n^2\pi^2,\\
(1+\lambda_n) &= \frac{1+4n^2\pi^2}{4},\\
\lambda_n &= \frac{-3+4n^2\pi^2}{4}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

c) As autofunções correspondentes são

$$y_n = \mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{sen}(n\pi x) \ \blacksquare$$

d) Dadas duas autofunções $y_m(x)$ e $y_n(x)$, o produto interno com $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$ é

$$
\begin{aligned}
\langle y_m, y_n\rangle &= \int_0^1 y_m(x)y_n(x)w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{sen}(m\pi x)\,\mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \mathrm{sen}(m\pi x)\ \mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\cos((m-n)\pi x) - \cos((m+n)\pi x)\right]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2(m-n)}\int_0^1 \cos((m-n)\pi x)\,(m-n)\mathrm{d}x - \frac{1}{2(m+n)}\int_0^1 \cos((m+n)\pi x)\,(m+n)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2(m-n)}\,\mathrm{sen}((m-n)\pi x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2(m+n)}\,\mathrm{sen}((m+n)\pi x)\Big|_0^1\\
&= \frac{1}{2(m-n)}\,\mathrm{sen}((m-n)\pi) - \frac{1}{2(m+n)}\,\mathrm{sen}((m+n)\pi) = 0 \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30] Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{f(x)\}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} f(x)[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+1} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(pois } f \text{ é par)} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+1} [1 - x]\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \times \frac{1 - \cos(k)}{k^2} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [30] **Utilizando o método das características**, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{e}^t \frac{\partial \phi}{\partial x} = x, \qquad \phi(x,0) = f(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $\phi(x,t) = F(s)$ sobre $x = X(s)$ e $t = T(s)$:

$$\begin{aligned}
\phi(X(s),T(s)) &= F(s);\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s};\\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1 \Rightarrow T(s) = \underbrace{T(0)}_{\equiv 0} + s,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^s,\\
\int_{X(0)}^{X(s)} \mathrm{d}\xi &= \int_0^s \mathrm{e}^\tau \, \mathrm{d}\tau,\\
X(s) - X(0) &= \mathrm{e}^s - 1 \Rightarrow X(0) = X(s) + 1 - \mathrm{e}^s.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{e}^t \frac{\partial \phi}{\partial x} &= x,\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= X(0) + \mathrm{e}^s - 1,\\
F(s) - F(0) &= \int_{\tau=0}^{s} \left[X(0) + \mathrm{e}^\tau - 1\right] \, \mathrm{d}\tau\\
F(s) &= F(0) + (X(0) - 1)s + (\mathrm{e}^s - 1)\\
F(0) &= f(X(0)) = f(x + 1 - \mathrm{e}^t);\\
\phi(x,t) &= F(s) = f(x + 1 - \mathrm{e}^t) + (x + 1 - \mathrm{e}^t - 1)t + (\mathrm{e}^t - 1)\\
\phi(x,t) &= f(x + 1 - \mathrm{e}^t) + (x - \mathrm{e}^t)t + (\mathrm{e}^t - 1) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹