TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03B, 06 out 2023
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Mostre que

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right\} = \frac{1}{2}\left[H(k+1) - H(k-1)\right].$$

Sugestões (fatos você pode usar sem demonstrar):

a)

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \text{ é par } \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cos(kx)\,\mathrm{d}x.$$

b)

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a),$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a),$$

$$\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right] = \operatorname{sen}(a)\cos(b).$$

Agora faça $a = x$, $b = kx$ na integral da transformada.

c) Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(cx)}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & c = 0,\\ +\pi & c > 0,\\ -\pi & c < 0,\end{cases}$$
$$= \pi(2H(c) - 1),$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside, e $H(0) = 1/2$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2x}\left[\operatorname{sen}(x+kx) + \operatorname{sen}(x-kx)\right]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2x}\left[\operatorname{sen}(kx+x) - \operatorname{sen}(kx-x)\right]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2x}\left[\operatorname{sen}((k+1)x) - \operatorname{sen}((k-1)x)\right]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}((k+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}((k-1)x)}{x}\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\pi(2H(k+1)-1) - \pi(2H(k-1)-1)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[H(k+1) - H(k-1)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Usando a desigualdade de Schwarz e o produto interno usual no espaço das funções complexas quadrado-integráveis, e supondo que todas as integrais convergem, mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi||f(\xi)| \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right| \mathrm{d}\xi \leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |f(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|^2 \mathrm{d}\xi\right]^{1/2}$$

onde $\xi \in \mathbb{R}$ e $f(\xi) \in \mathbb{C}$. As funções que devem ser utilizadas na desigualdade de Schwarz são $u(x) = |\xi f(\xi)|$ e $v(x) = |\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi|$. **Mostre todos os passos. Não omita nenhum detalhe.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A desigualdade de Schwarz é

$$\begin{aligned}
|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| &\leq \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}\sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle};\\
u(\xi) &= |\xi f(\xi)|\,;\\
v(\xi) &= \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|;\\
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x)u(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} v^*(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2},\\
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi f(\xi)| \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right| \mathrm{d}x\right| &\leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi f(\xi)|^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2},\\
\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|\,|f(\xi)| \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right| \mathrm{d}x &\leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\,|f(\xi)|^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Ache a função de Green do problema

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = \operatorname{sen}(x), \quad y(0) = 3.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Multiplico por $G(x,\xi)$ e integro de 0 a infinito:

$$\int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - 2\xi y\right]\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty G(x,\xi)\operatorname{sen}\xi\,\mathrm{d}\xi$$

Integrando por partes,

$$G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\infty} + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G\right]\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty G(x,\xi)\operatorname{sen}\xi\,\mathrm{d}\xi$$

$$\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$-G(x,0)y(0) + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G\right]\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty G(x,\xi)\operatorname{sen}\xi\,\mathrm{d}\xi$$

$$-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G = \delta(\xi - x).$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + 2\xi G = -\delta(\xi - x).$$

Agora, $G = uv$, e

$$\begin{aligned}
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + 2\xi v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\delta(\xi - x)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} &= -2\xi v\\
\frac{dv}{2v} &= -2\xi\\
\ln\left(\frac{v}{v_0(x)}\right) &= -\xi^2\\
v &= v_0(x)\exp(-\xi^2)\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{\exp(\xi^2)}{v_0(x)}\delta(\xi - x)\\
u(\xi) &= u_0(x) - \int_{\eta=0}^{\xi}\frac{\exp(\eta^2)}{v_0(x)}\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta\\
&= u_0(x) - \frac{H(\xi - x)\exp(x^2)}{v_0(x)} \Rightarrow\\
G(x,\xi) &= \left[u_0(x)v_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2)\\
&= \left[G_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2).
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0 &\Rightarrow G_0(x) = \exp(x^2)\\
G(x,\xi) &= [1 - H(\xi - x)]\exp(x^2 - \xi^2)\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Encontre os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$y'' + 4y' + (4 - 9\lambda)y = 0, \qquad y(0) = y(L) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se $\lambda > 0$:

$$y(x) = c_1 e^{(-2+3\sqrt{\lambda})x} + c_2 e^{(-2-3\sqrt{\lambda})x}.$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 e^{(-2+3\sqrt{\lambda})L} + c_2 e^{(-2-3\sqrt{\lambda})L} &= 0, \end{aligned}$$

donde $c_1 = c_2 = 0$, e $\lambda > 0$ não é autovalor.

Se $\lambda = 0$:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}.$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 L e^{-2L} &= 0, \end{aligned}$$

donde $c_1 = c_2 = 0$, e $\lambda = 0$ não é autovalor.

Se $\lambda < 0$:

$$y(x) = e^{-2x}\left(c_1 \operatorname{sen}(3\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(3\sqrt{-\lambda}x)\right).$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_2 &= 0, \\ e^{-2L} c_1 \operatorname{sen}(3\sqrt{-\lambda}L) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 3\sqrt{-\lambda}L &= n\pi, \\ \lambda_n &= -\frac{\pi^2 n^2}{9L^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

As autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = e^{-2x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹