TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02B, 15 set 2023
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Se $f(x) = 1$, $0 < x \le 1$, obtenha a série de Fourier da extensão ímpar de $f(x)$ no intervalo $-1 \le x \le 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A extensão ímpar é

$$f_I(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1, \\ -1, & -1 \le x < 0. \end{cases}$$

No intervalo $[-1, 1]$, com comprimento $L = 2$, uma base para as funções ímpares é formada pelo conjunto

$$\left\{ \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} \right\}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Segue-se o de sempre:

$$\begin{aligned} f_I(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\pi x, \\ f_I(x) \operatorname{sen} m\pi x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x, \\ \int_{-1}^{1} f_I(x) \operatorname{sen} m\pi x \,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{-1}^{1} \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x \,\mathrm{d}x \\ 2 \int_{0}^{1} \operatorname{sen} m\pi x \,\mathrm{d}x &= B_m \int_{-1}^{1} \left[\operatorname{sen} m\pi x\right]^2 \,\mathrm{d}x \\ \frac{2}{\pi m}\left[1 - (-1)^m\right] &= B_m \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt: dado um conjunto de n vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, $V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, é possível obter um conjunto $F = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ de vetores ortogonais entre si, e $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ de vetores ortonormais, com o seguinte algoritmo:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_1|}\boldsymbol{f}_1, \\
\boldsymbol{f}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_2|}\boldsymbol{f}_2, \\
\boldsymbol{f}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2, & \boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_3|}\boldsymbol{f}_3, \\
&\vdots & &\vdots \\
\boldsymbol{f}_k &= \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_k &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_k|}\boldsymbol{f}_k,
\end{aligned}
$$

até $k = n$. Usando a última equação acima, e o fato de que $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_l = \delta_{il}$ para i e l entre 1 e $k-1$, mostre que

$$
\boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{e}_l = 0, \forall l \in \{1, 2, \ldots, k-1\}.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) &= \left(\left[\boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i \right] \cdot \boldsymbol{e}_l \right) \\
&= (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) - \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_i) \underbrace{(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_l)}_{\delta_{il}} \\
&= (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) - (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) = 0 \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Sabendo que

$$\int x^2 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^3}\left[\left(k^2x^2 - 2kx + 2\right)\mathrm{e}^{kx}\right],$$

a) [10] obtenha a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = x^2, \qquad 0 \le x \le 1;$$

b) [15] agora utilize a igualdade de Parseval,

$$\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

para obter o valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^4 n^4}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2ni\pi x}{L}};\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2ni\pi x}{L}} f(x)\,\mathrm{d}x;\\
a &= 0,\\
b &= 1,\\
L &= b - a = 1;\\
c_n &= \frac{1}{1}\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-\frac{2ni\pi x}{1}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(k^2 - 2k + 2)\mathrm{e}^k}{k^3} - \frac{2}{k^3};\\
k &= -2\pi \mathrm{i} n \Rightarrow \mathrm{e}^k = 1;\\
c_n &= \frac{(-2\pi n\mathrm{i})^2 - 2(-2\pi n\mathrm{i})}{(-2\pi n\mathrm{i})^3}\\
&= \frac{4\pi^2 n^2 \mathrm{i}^2 + 4\pi n\mathrm{i}}{-8\pi^3 n^3 \mathrm{i}^3}\\
&= \frac{\pi^2 n^2 \mathrm{i}^2 + \pi n\mathrm{i}}{2\pi^3 n^3 \mathrm{i}}\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2\pi n} + \frac{1}{2\pi^2 n^2}, \qquad n \neq 0.
\end{aligned}$$

Claramente, o cálculo de c_0 precisa ser feito separadamente:

$$c_0 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Continue a solução no verso ⟹

Para obter a igualdade de Parseval neste caso,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^4 \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{5}; \\
|c_0|^2 &= \frac{1}{9}; \\
|c_n|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 n^2} + \frac{1}{4\pi^4 n^4}; \\
\frac{1}{5} &= \frac{1}{9} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2} + \frac{1}{4\pi^4 n^4} \\
\frac{4}{45} &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2} + \frac{1}{4\pi^4 n^4} \\
\frac{16}{45} &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^4 n^4} \\
\frac{16}{45} &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^4 n^4} \\
\frac{8}{45} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^4 n^4} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Obtenha a transformada de Fourier de

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-|x|},$$

sabendo que

$$\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-|x|} \cos(bx)\, \mathrm{d}x = -\frac{2(3b^2-1)}{(b^2+1)^3}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Note que $f(x)$ é uma função par.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-|x|}\,[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-|x|}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{\pi}\frac{2(3k^2-1)}{(k^2+1)^3}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹