TEA010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 1 set 2023
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Resolva a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T}x = \delta(t), \qquad x(0_-) = 0,$$

usando obrigatoriamente transformadas de Laplace. Por causa da presença da distribuição delta de Dirac, é conveniente definir

$$\mathscr{L}\{f(t)\} \equiv \int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Siga o seguinte roteiro:

a) [05] Monte a tabela de transformadas de que você necessitará, na ida ou na volta, calculando $\mathscr{L}\{e^{at}\}$ e $\mathscr{L}\{\delta(t)\}$.

b) [05] Mostre que

$$\mathscr{L}\{H(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

c) [15] De posse dos resultados de a) e de b), resolva o problema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\} = \int_{0_-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-a};$$
$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= \int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)\mathrm{e}^{-s(t-a)}\mathrm{e}^{-as}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-as}\int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)\mathrm{e}^{-s(t-a)}\,\mathrm{d}(t-a) \\
&= \mathrm{e}^{-as}\int_{a}^{\infty} f(t-a)\mathrm{e}^{-s(t-a)}\,\mathrm{d}(t-a) \\
&= \mathrm{e}^{-as}\int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \mathrm{e}^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
s\overline{x} - x(0_-) + \frac{1}{T}\overline{x} &= 1 \\
\overline{x}\left(s + \frac{1}{T}\right) &= 1 \\
\overline{x} &= \frac{1}{s - \frac{-1}{T}} = \mathscr{L}\{H(t)\mathrm{e}^{-t/T}\} \Rightarrow \\
x(t) &= H(t)\mathrm{e}^{-t/T}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Sabendo que

$$\int_0^{\pi} x \,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x = \pi,$$

$$\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3},$$

$$\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

utilize obrigatoriamente a desigualdade de Schwarz para obter uma desigualdade envolvendo π e $\sqrt{6}$. **Simplifique ao máximo.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
|\langle f, g\rangle| &\le \|f\|\|g\|,\\
\left|\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \left[\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \left[\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2};\\
\pi &\le \left[\frac{\pi^3}{3}\right]^{1/2} \left[\frac{\pi}{2}\right]^{1/2}\\
\pi &\le \left[\frac{\pi^4}{3\times 2}\right]^{1/2}\\
\pi &\le \frac{\pi^2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \quad \Rightarrow\\
\pi &\ge \sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{6} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = x + \mathrm{i}, \qquad -\pi \le x \le +\pi, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2ni\pi x}{L}};\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2ni\pi x}{L}} f(x)\,\mathrm{d}x;\\
a &= -\pi,\\
b &= +\pi,\\
L &= b - a = 2\pi;\\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-\frac{2ni\pi x}{2\pi}}\,[x + \mathrm{i}]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}[x + \mathrm{i}]\,\mathrm{d}x;\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(nx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(nx)]\,[x + \mathrm{i}]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x\right\};\\
\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x &= 0,\\
\int_{-\pi}^{+\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{2\pi(-1)^n}{n},\\
c_n &= \frac{-\mathrm{i}}{2\pi} \times -\frac{2\pi(-1)^n}{n} = \mathrm{i}\frac{(-1)^n}{n}, \qquad n \ne 0.
\end{aligned}$$

O cálculo de c_0 precisa ser feito separadamente:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [x + \mathrm{i}]\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}.$$

Portanto,

$$(x + \mathrm{i}) = \mathrm{i}\left[1 + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\ne 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] O Engenheiro Ambiental Matt Matcal sabe que duas variáveis ambientais **que sempre têm média zero**, x' e y', estão ligadas pela relação teórica $y' = (x')^2$. Por isso, ele propõe calcular um índice estatístico de dependência definido por

$$[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'] \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2 y_i',$$

onde $\boldsymbol{x}',\ \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^n$ e

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' = 0, \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i' = 0.$$

Verifique se $[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}']$ é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Para $\boldsymbol{x}',\ \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^n$ as propriedades de um produto interno são

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \rangle &= \langle \boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}' \rangle,\\
\langle \boldsymbol{x}', \alpha\boldsymbol{y}' \rangle &= \alpha \langle \boldsymbol{x}' \boldsymbol{y}' \rangle\\
\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{z}' \rangle &= \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \rangle + \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{z}' \rangle,\\
\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle &> 0, \qquad \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{0},\\
\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle &= 0, \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Verifiquemos a primeira:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2 y_i'\\
&\neq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i')^2 x_i' = [\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}'],
\end{aligned}$$

e portanto o índice de Matt não é um produto interno legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹