TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01A, 03 abr 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ______________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Quando um explosivo é detonado debaixo d'água, ele se converte quase que instantaneamente em gás. A pressão inicial do gás é p_0. A explosão produz uma onda de choque esférica que se propaga (expandindo-se) pela água. Durante a propagação, o raio da R da esfera aumenta, e a pressão p do gás em seu interior diminui. A pressão p do gás durante a explosão depende das variáveis p_0, R, ρ (massa específica da água, cujas dimensões são $\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}$), κ_T (compressibilidade isotérmica da água) e da massa m de explosivo. Note que κ_T é definido por

$$\kappa_T \equiv \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right).$$

Há 3 dimensões fundamentais M, L e T, e 6 variáveis. Obtenha os 3 parâmetros adimensionais do problema, escolhendo **obrigatoriamente** p_0, R e ρ como variáveis em comum (no máximo) para os mesmos.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A lista de variáveis e dimensões é

$$
\begin{aligned}
[\![p]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2},\\
[\![\kappa_T]\!] &= \mathsf{M}^{-1}\,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{2}\\
[\![m]\!] &= \mathsf{M},\\
[\![p_0]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2},\\
[\![R]\!] &= \mathsf{L},\\
[\![\rho]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}.
\end{aligned}
$$

Os 3 grupos adimensionais são:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= p p_0^a R^b \rho^c,\\
[\![\Pi_1]\!] &= [\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}]^a[\mathsf{L}^b][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^c\\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^{1+a+c}\mathsf{L}^{-1-a+b-3c}\mathsf{T}^{-2-2a}.
\end{aligned}
$$

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a + c &= -1,\\
-a + b - 3c &= 1,\\
-2a &= 2
\end{aligned}
$$

donde $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$ e

$$\Pi_1 = \frac{p}{p_0}.$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= \kappa_T p_0^a R^b \rho^c,\\
[\![\Pi_1]\!] &= [\mathsf{M}^{-1}\,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{2}][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}]^a[\mathsf{L}^b][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^c\\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^{-1+a+c}\mathsf{L}^{1-a+b-3c}\mathsf{T}^{2-2a}
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a + c &= 1, \\
-a + b - 3c &= -1, \\
-2a &= -2
\end{aligned}
$$

donde $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ e

$$\Pi_2 = \kappa_T p_0.$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_3 &= m p_0^a R^b \rho^c, \\
[\![\Pi_1]\!] &= [\mathsf{M}]\,[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}]^a\,[\mathsf{L}^b]\,[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^c \\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^{1+a+c}\mathsf{L}^{-a+b-3c}\mathsf{T}^{-2a}
\end{aligned}
$$

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a + c &= -1 \\
-a + b - 3c &= 0 \\
-2a &= 0
\end{aligned}
$$

donde $a = 0$, $b = -3$, $c = -1$ e

$$\Pi_3 = m R^{-3} \rho^{-1} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Escreva uma linha de Python que converte 7777 da base 10 para a base 2.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

`bin(7777)` ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [25]

a) [05] Calcule a integral analítica

$$I = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) [10] Aproxime o $\cos(x)$ por uma parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ passando por $(-\pi/2, 0)$, $(0, 1)$ e $(+\pi/2, 0)$ (ou seja: **encontre** a, b e c).

c) [10] Com a, b e c encontrados acima, obtenha o valor de

$$I_a = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Atenção: simplifique ao máximo o resultado para I_a e depois obtenha I_a **numericamente**, fazendo as contas à mão, com apenas 3 algarismos significativos: qual é a diferença relativa $|(I_a - I)/I|$?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$I = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x = 2.$$

b)

$$\begin{aligned} a\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c &= 0, \\ c &= 1, \\ a\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + b\left(\frac{\pi}{2}\right) + c &= 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a\frac{\pi^2}{4} + 1 &= 0, \\ a &= -\frac{4}{\pi^2}, \\ b &= 0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{4}{\pi^2}x^2 + 1; \\ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09; \\ \left|\frac{I_a - I}{I}\right| &= \frac{2{,}09 - 2}{2} = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] (**Anulada: resposta foi impressa na prova**) Traduza a função em Python abaixo em **apenas duas fórmulas** (no máximo) para o cálculo da integral numérica correspondente.

```
def simple(n,a,b,f):
   dx = (b-a)/n;
   I = 0.0;
   for i in range(1,n+1):
      xi = a + (i-0.5)*dx
      I += f(xi)*dx
   return I
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\Delta x = (b-a)/n,$$
$$I = \sum_{i=1}^{n} f(a + (i - 1/2)\Delta x)\Delta x$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01B, 10 abr 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

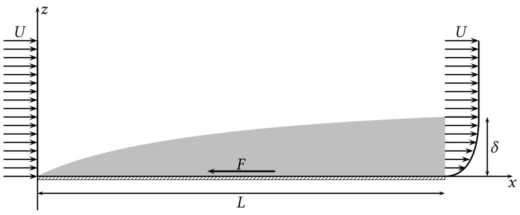
NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Quando um escoamento uniforme com velocidade U encontra uma placa de comprimento L, forma-se uma **camada-limite** (mostrada ao lado em cinza), que é uma região em que a velocidade vai de zero na placa até U no limite superior da camada-limite. As variáveis de interesse do problema são a força **por unidade de largura** F da placa sobre o escoamento, a massa específica ρ do fluido, a viscosidade cinemática ν do fluido ($[\![\nu]\!] = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$), o comprimento L da placa, a espessura δ da camada-limite em $x = L$, e a velocidade não-perturbada U.
Utilizando como variáveis comuns (no máximo) ρ, U e L, obtenha os 3 grupos adimensionais do problema.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A lista de variáveis e dimensões é

$$
\begin{aligned}
[\![F]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{T}^{-2},\\
[\![\nu]\!] &= \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1},\\
[\![\delta]\!] &= \mathsf{L},\\
[\![\rho]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3},\\
[\![U]\!] &= \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}\\
[\![L]\!] &= \mathsf{L}.
\end{aligned}
$$

Os 3 grupos adimensionais são:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= F\rho^a U^b L^c,\\
[\![\Pi_1]\!] &= [\mathsf{M}\,\mathsf{T}^{-2}]\,[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^a[,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}]^b[\mathsf{L}]^c\\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^{1+a}\mathsf{L}^{-3a+b+c}\mathsf{T}^{-2-b}.
\end{aligned}
$$

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a + 1 &= 0,\\
-3a + b + c &= 0,\\
-b - 2 &= 0,
\end{aligned}
$$

donde $a = -1$, $b = -2$, $c = -1$ e

$$
\Pi_1 = \frac{F}{\rho U^2 L}.
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= \nu\rho^a U^b L^c,\\
[\![\Pi_2]\!] &= [\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}]\,[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^a[\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}]^b[\mathsf{L}]^c\\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^a\mathsf{L}^{2-3a+b+c}\mathsf{T}^{-1-b}
\end{aligned}
$$

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a &= 0,\\
-3a + b + c + 2 &= 0,\\
-b - 1 &= 0,
\end{aligned}
$$

donde $a = 0$, $b = -1$, $c = -1$ e

$$
\Pi_2 = \frac{\nu}{UL}.
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_3 &= \delta \rho^a U^b L^c,\\
[\![\Pi_3]\!] &= [\mathsf{L}]\,[\mathsf{M\,L^{-3}}]^a [\mathsf{L\,T^{-1}}]^b [\mathsf{L}]^c\\
1 = \mathsf{M^0 L^0 T^0} &= \mathsf{M}^a \mathsf{L}^{1-3a+b+c} \mathsf{T}^{-b}
\end{aligned}
$$

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a &= 0,\\
-3a + b + c + 1 &= 0,\\
-b &= 0,
\end{aligned}
$$

donde $a = 0$, $b = -0$, $c = -1$ e

$$
\Pi_3 = \frac{\delta}{L}\ \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Dado o programa em Python a seguir,

```
#!/usr/bin/python3
from numpy.random import rand
fob = open('a.bin','wb')
for k in range(3):
   a = rand(10)
   a.tofile(fob)
fob.close()
```

e sabendo que um `float` ocupa 8 bytes em Python, qual é o tamanho do arquivo `'a.bin'` em bytes que o programa gera?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
240

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] A **Regra de Simpson** para integração numérica utiliza um número par de intervalos e aproxima a integral de $f(x)$ com $2n+1$ pontos segundo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right],$$

onde $x_0 = a$, $x_{2n} = b$, e $\Delta x = (b-a)/(2n)$. Escreva uma função `simpson` (em Python) que calcula a fórmula acima. Os argumentos de entrada devem ser `(m,a,b,f)`, onde $m = 2n$ e f é a função a ser integrada.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
def simpson(m,a,b,f):
   assert(m % 2 == 0)
   dx = (b-a)/m
   Se = f(a) + b(b)
   S4 = 0.0
   for k in range(1,m,2):
      xk = a + k*dx
      S4 += f(xk)
   S4 *= 4
   S2 = 0.0
   for k in range(2,m,2):
      xk = a + k*dx
      S2 += f(xk)
   S2 *= 2
   I = (dx/3.0)*(Se + S4 + S2)
   return I
```

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] A função

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

não pode ser integrada em termos de funções transcedentais elementares. No entanto, expandindo-se $\exp(-x)$ em série de Taylor em torno de $x = 0$, é possível obter facilmente uma "série" para $f(x)$, cujos primeiros termos são

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{x^{5/2}}{6} + \frac{x^{7/2}}{24} - \frac{x^{9/2}}{120} + \ldots$$

a) [12.5] Obtenha o termo geral da série acima, ou seja: obtenha as expressões para C_n e p_n para $n = 0, 1, 2, \ldots$ que concordam com os termos acima e tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{p_n}.$$

b) [12.5] Integrando termo a termo, encontre a série (isto é, D_n e q_n) da primitiva de $f(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^{q_n}$$

de tal forma que $F'(x) = f(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned}\frac{\exp(-x)}{x^{1/2}} &= x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1/2}}{n!};\end{aligned}$$

portanto, $C_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ e $p_n = n - 1/2$.

b) Integrando termo a termo,

$$\begin{aligned}F(x) = \int f(x)\,dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1/2}}{n!}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{n-1/2}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n+1/2}}{n+1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1/2)n!} x^{n+1/2};\end{aligned}$$

logo, $D_n = \frac{(-1)^n}{(n+1/2)n!}$ e $q_n = n + 1/2$ ■

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 28 abr 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Como vimos em aula, o método de Runge-Kutta permite resolver (em princípio) qualquer sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$$

simplesmente programando $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ e passando a função como argumento para `rk4(x,y,h,f)`. Se o sistema de EDOs é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 + y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix},$$

programe a `f(x,y)` correspondente em Python.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
from numpy import array
def f(x,y):
   return array([y[1]+y[2],y[2]-y[0],y[0]+y[1]])
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se $E = ((1,1), (-1,1))$ é uma base do $\mathbb{R}^2$, obtenha as coordenadas de $\boldsymbol{v} = (3,4)$ na base E.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2,\\
(3,4) &= a(1,1) + b(-1,1)\\
(3,4) &= (a-b, a+b),\\
a-b &= 3,\\
a+b &= 4,\\
2a &= 7,\\
a &= 7/2,\\
7/2 - b &= 3,\\
b &= 7/2 - 3 = 7/2 - 6/2 = 1/2 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Determine a projeção do vetor $\boldsymbol{v} = (3, 3, 1)$ na direção do vetor $\boldsymbol{p} = (1/2, 1/2, 1/2)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{p}| &= \sqrt{1/4 + 1/4 + 1/4} = \sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2};\\
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{p} = \frac{2}{\sqrt{3}}(1/2, 1/2, 1/2);\\
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{m} &= (3, 3, 1)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}(1/2, 1/2, 1/2)\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[3/2 + 3/2 + 1/2\right]\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{7}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Se $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{p}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$, calcule

$$([\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{p}$$

em função dos produtos escalares $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})$, $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{p})$, $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p})$ e $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$. **Sugestão:** você vai precisar da identidade polar.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}]_k &= \epsilon_{ijk} u_i v_j, \\
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w} &= \epsilon_{klm} [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}]_k w_l \boldsymbol{e}_m, \\
&= \epsilon_{klm} \epsilon_{ijk} u_i v_j w_l \boldsymbol{e}_m; \\
([\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{p} &= \epsilon_{klm} \epsilon_{ijk} u_i v_j w_l \boldsymbol{e}_m \cdot p_n \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} u_i v_j w_l p_n \delta_{mn} \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} u_i v_j w_l p_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} u_i v_j w_l p_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_i v_j w_l p_m \\
&= u_i v_j w_i p_j - u_i v_j w_j p_i \\
&= (u_i w_i)(v_j p_j) - (u_i p_i)(v_j w_j) \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 28 abr 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Dado o programa a seguir escrito em Python,

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import array
h = 0.1                         # passo em x
x = [0.0]                       # x inicial
y = [array([1.0,0.0])]          # y inicial
n = int(10/h)                   # número de passos
def ff(x,y):
    return array([y[0]+y[1],y[0]-y[1]])
def rk4(x,y,h,ff):
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
for i in range(0,n):           # loop da solução numérica
   xn = (i+1)*h
   yn = rk4(x[i],y[i],h,ff)
   x.append(xn)
   y.append(yn)
fou = open('ruk.out','wt')
for i in range(0,n+1):         # imprime o arquivo de saída
   fou.write( '%12.6f␣%12.6f␣%12.6f\n' % (x[i],y[i][0],y[i][1]) )
fou.close()
```

qual é o problema que ele resolve? Escreva **todas** as equações que especificam completamente o problema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se $E = ((1,1,0),(1,-1,0),(0,2,1))$ é uma base do $\mathbb{R}^3$, obtenha as coordenadas de $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$ na base E.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3,\\
(1,1,1) &= x(1,1,0) + y(1,-1,0) + z(0,2,1),\\
(1,1,1) &= (x+y, x-y+2z, z),\\
z &= 1,\\
x+y &= 1,\\
x-y &= 1-2 = -1,\\
x &= 0,\\
y &= 1 \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Seja $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$, e $F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ uma outra base, onde

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\\
\boldsymbol{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1),\\
\boldsymbol{f}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1).
\end{aligned}
$$

a) [10] Mostre que F é uma base ortonormal.

b) [15] Calcule a matriz de rotação de E para F.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{f}_1 &= 1,\\
\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{f}_1 &= 0,\\
\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{f}_1 &= 0,\\
f_2 \cdot f_2 &= 1,\\
f_2 \cdot f_3 &= 0,\\
f_3 \cdot f_3 &= 1.
\end{aligned}
$$

b)

$$
C_{ij} = \boldsymbol{f}_j \cdot \boldsymbol{e}_i :
$$

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}};\\
C_{12} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}};\\
C_{13} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}};\\
C_{21} &= \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}};\\
C_{22} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{6}};\\
C_{23} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0;\\
C_{31} &= \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}};\\
C_{32} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}};\\
C_{33} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Se

$$\boldsymbol{A} = A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m, \qquad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = \epsilon_{ijk}x_iy_j\boldsymbol{e}_k,$$

onde $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ é a base canônica, obtenha uma expressão em notação indicial para

$$\boldsymbol{A}\cdot[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}] &= A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m\cdot\epsilon_{ijk}x_iy_j\boldsymbol{e}_k\\ &= A_{lm}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_k)\\ &= A_{lm}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l\delta_{mk}\\ &= A_{lk}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l \ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03A, 26 mai 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] **Usando obrigatoriamente a regra de Leibniz**, calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{2x}\frac{\operatorname{sen}(t/x)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A regra de Leibniz é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = f(x,b)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} - f(x,a)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} + \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{2x}\frac{\operatorname{sen}(\frac{t}{x})}{t}\,\mathrm{d}t &= \frac{\operatorname{sen}(2x/x))}{2x}\frac{\mathrm{d}(2x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\operatorname{sen}(x/x)}{x}\frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}x} + \int_x^{2x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\operatorname{sen}(t/x)}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\operatorname{sen}(2)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(1)}{x} + \int_x^{2x}\frac{1}{t}\cos\left(\frac{t}{x}\right)\times -\frac{t}{x^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\operatorname{sen}(2)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(1)}{x} - \frac{1}{x}\int_x^{2x}\cos\left(\frac{t}{x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{x}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(2)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(1)}{x} - \frac{1}{x}\int_1^2\cos(u)\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{\operatorname{sen}(2)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(1)}{x} - \left[\frac{\operatorname{sen}(2)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(1)}{x}\right] = 0 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

Calcule a integral

$$I = \iint_{R_{xy}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

onde R_{xy} é o semi-círculo definido por $x^2+y^2 \le 1$ e $x \ge 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
É infinitamente mais fácil usar coordenadas polares. Primeiramente,

$$\begin{aligned}
x &= r\cos(\theta),\\
y &= r\,\mathrm{sen}(\theta),\\
x^2+y^2 &= r^2,\\
f(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
&\frac{x}{r} \times \frac{1}{r}\\
&= \frac{\cos(\theta)}{r} = g(r,\theta).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \iint_{R_{r\theta}} g(r,\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r;$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix}\\
&= r;
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{R_{r\theta}} g(r,\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\
&= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{r}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{\theta=-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&= [\mathrm{sen}(\theta)]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Se

$$F = (yz^2 + y^2z)\boldsymbol{i} + (x^2z + xz^2)\boldsymbol{j} + (xy^2 + x^2y)\boldsymbol{k},$$

calcule o $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

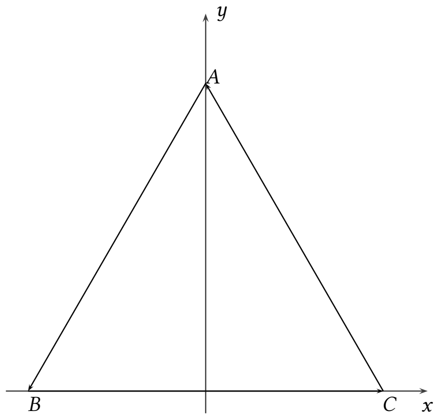
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (yz^2 + y^2z) & (x^2z + xz^2) & (xy^2 + x^2y)\boldsymbol{k}, \end{vmatrix} \\
&= [(2xy + x^2) - (x^2 + 2xz)]\boldsymbol{i} + [(2yz + y^2) - (y^2 + 2xy)]\boldsymbol{j} + [(2xz + z^2) - (z^2 + 2yz)]\boldsymbol{k} \\
&= 2(xy - xz)\boldsymbol{i} + 2(yz - xy)\boldsymbol{j} + 2(xz - yz)\boldsymbol{k} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Se $\boldsymbol{F}(x, y) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, calcule o valor da integral de linha

$$I = \oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

ao longo do caminho fechado formado pelos lados do triângulo equilátero da figura (o tamanho dos lados é 1).



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Use o Teorema de Green: se $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$,

$$\oint_{\mathscr{L}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{S}} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \mathrm{d}A$$

Mas $P = -y$ e $Q = x$;

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1,$$
$$I = \iint_{\mathscr{S}} 2\,\mathrm{d}A = 2A,$$

onde A é a área do triângulo retângulo:

$$A = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4};$$
$$I = \frac{\sqrt{3}}{2} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03B, 03 jun 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Resolva o sistema de EDOs

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A matriz é simétrica. Existem dois autovalores reais e dois autovetores mutuamente ortogonais. Os autovalores e autovetores associados são

$$\lambda = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = (1,1),$$
$$\lambda = 2 \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = (1,-1).$$

Na base $A = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ dos autovetores o sistema fica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}_A.$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}u_{1A}}{\mathrm{d}t} = 0u_{1A} \Rightarrow u_{1A}(t) = C_1,$$
$$\frac{\mathrm{d}u_{2A}}{\mathrm{d}t} = 2u_{2A} \Rightarrow u_{2A}(t) = C_2\mathrm{e}^{2t}.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = u_{1A}\boldsymbol{v}_1 + u_{2A}\boldsymbol{v}_2 = C_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Sabendo que

$$\int \frac{a}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

Calcule a integral

$$I = \iint_{R_{xy}} \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

onde R_{xy} é a região $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

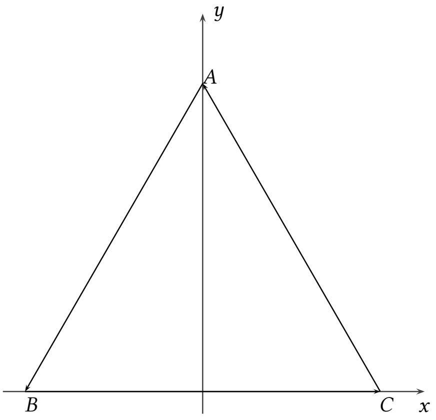
$$\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=0}^{x} \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\Big|_{y=0}^{x} \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} [\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0)]\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} \frac{\pi}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Se $\boldsymbol{F}(x,y) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, **sem utilizar os teoremas de Stokes ou de Green**, calcule o valor da integral de linha

$$I = \oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

ao longo do caminho fechado formado pelos lados do triângulo equilátero da figura (o tamanho dos lados é 1). **Sugestão:** parametrize cada um dos 3 segmentos de reta que formam os lados do triângulo e some as integrais de linha sobre cada trecho.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As coordenadas dos pontos são

$$\begin{aligned}
A &= \left(0, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\\
B &= \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right),\\
C &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).
\end{aligned}$$

Os segmentos de reta podem ser parametrizados como se segue:

CA:

$$\begin{aligned}
x &= at + b,\\
y &= ct + d;\\
x(0) &= 1/2 \Rightarrow b = 1/2,\\
x(1) &= 0 \Rightarrow a = -1/2,\\
y(0) &= 0 \Rightarrow d = 0,\\
y(1) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2};\\
x(t) &= (-1/2)t + 1/2,\\
y(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}t.
\end{aligned}$$

AB:

$$\begin{aligned}
x &= at + b,\\
y &= ct + d;\\
x(0) &= 0 \Rightarrow b = 0,\\
x(1) &= -1/2 \Rightarrow a = -1/2,\\
y(0) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{2},\\
y(1) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = -\frac{\sqrt{3}}{2};\\
x(t) &= (-1/2)t,\\
y(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[1 - t\right].
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

BC:

$$
\begin{aligned}
x &= at + b,\\
y &= ct + d;\\
x(0) = -1/2 &\Rightarrow b = -1/2,\\
x(1) = +1/2 &\Rightarrow a = +1,\\
y(0) = 0 &\Rightarrow d = 0,\\
y(1) = 0 &\Rightarrow c = 0;\\
x(t) &= t - 1/2,\\
y(t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Sobre CA:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{d}t,\\
\boldsymbol{F} = (-y, x) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, (-1/2)t + 1/2\right),\\
\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \left[\frac{\sqrt{3}}{4}t + \frac{\sqrt{3}}{4}(1-t)\right]\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}t,\\
\int_{CA}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}
$$

Sobre AB:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{d}t,\\
\boldsymbol{F} = (-y, x) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t), (-1/2)t\right),\\
\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \left[\frac{\sqrt{3}}{4}(1-t) + \frac{\sqrt{3}}{4}t\right]\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}t\\
\int_{AB}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}
$$

Sobre BC:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) &= (1, 0)\,\mathrm{d}t,\\
\boldsymbol{F} = (-y, x) &= (0, t - 1/2),\\
\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= 0,\\
\int_{BC}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\oint \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Encontre a solução geral da EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x+1} = \cos(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{uv}{x+1} &= \cos(x),\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v}{x+1}\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \cos(x),\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v}{x+1} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}x}{x+1} &= 0,\\
\ln|v| + \ln|x+1| &= k_1,\\
\ln|v(x+1)| &= k_1,\\
|v(x+1)| &= \mathrm{e}^{k_1} = k_2,\\
v(x+1) &= \pm k_2 = k_3,\\
v &= \frac{k_3}{x+1};\\
\frac{k_3}{x+1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \cos(x),\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{k_3}(x+1)\cos(x),\\
u &= \frac{1}{k_3}\left[(x+1)\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x) + k_4\right],\\
y = uv &= \frac{1}{k_3}\left[(x+1)\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x) + k_4\right]\frac{k_3}{x+1}\\
&= \mathrm{sen}(x) + \frac{\cos(x)}{x+1} + \frac{k_4}{x+1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 17 jun 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Encontre a solução geral da EDO não-linear

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = -by^3, \qquad y(0) = y_0,$$

$a > 0$, $b > 0$. **Sugestão:** Tente $y = uv$ e resolva uma EDO linear e homogênea em v.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $y = uv$:

$$\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + auv &= -bu^3v^3,\\
\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + av\right]u + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -bu^3v^3.
\end{aligned}$$

Obrigue o termo dentro dos colchetes a ser nulo, e resolva:

$$v = v_0\mathrm{e}^{-ax}.$$

Substitua no que restou:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -bu^3v^2,\\
\frac{\mathrm{d}u}{u^3} &= -b[v_0\mathrm{e}^{-ax}]^2\,\mathrm{d}x,\\
\frac{\mathrm{d}u}{u^3} &= -bv_0^2\mathrm{e}^{-2ax}\,\mathrm{d}x,\\
\frac{1}{2u_0^2} - \frac{1}{2u^2} &= -\frac{bv_0^2}{2a}\left(1 - \mathrm{e}^{-2ax}\right),\\
\frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{u^2} &= -\frac{bv_0^2}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-2ax}\right),\\
\frac{1}{u^2} &= \frac{1}{u_0^2} + \frac{bv_0^2}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-2ax}\right),\\
\frac{1}{u^2} &= \frac{1}{u_0^2} + \frac{bu_0^2v_0^2}{au_0^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2ax}\right),\\
\frac{1}{u^2} &= \frac{1}{u_0^2}\left[1 + \frac{bu_0^2v_0^2}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-2ax}\right)\right],\\
u &= \frac{u_0}{\left[1 + \frac{by_0^2}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-2ax}\right)\right]^{1/2}},
\end{aligned}$$

donde

$$y = uv = \frac{y_0\mathrm{e}^{-ax}}{\left[1 + \frac{by_0^2}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-2ax}\right)\right]^{1/2}} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Encontre a solução geral de
$$
y'' - 5y' + 6y = x.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A solução da equação homogênea associada é
$$
y_h(x) = A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{3x}.
$$
Agora aplicamos o método de variação de constantes, fazendo
$$
y(x) = A(x)\mathrm{e}^{2x} + B(x)\mathrm{e}^{3x}.
$$
Derivamos:
$$
\begin{aligned}
y(x) &= A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{3x},\\
y'(x) &= 2A\mathrm{e}^{2x} + 3B\mathrm{e}^{3x} + \underbrace{A'\mathrm{e}^{2x} + B'\mathrm{e}^{3x}}_{=0},\\
y''(x) &= 4A\mathrm{e}^{2x} + 9B\mathrm{e}^{3x} + 2A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x}.
\end{aligned}
$$
Substituímos na EDO:
$$
\begin{aligned}
4A\mathrm{e}^{2x} + 9B\mathrm{e}^{3x} + 2A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x} - 5\left[2A\mathrm{e}^{2x} + 3B\mathrm{e}^{3x}\right] + 6\left[A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{3x}\right] &= x,\\
A\mathrm{e}^{2x}\underbrace{[4 - 10 + 6]}_{=0} + B\mathrm{e}^{3x}\underbrace{[9 - 15 + 6]}_{=0} + 2A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x} &= x.
\end{aligned}
$$
Obtemos o sistema de EDO*s*,
$$
\begin{aligned}
A'\mathrm{e}^{2x} + B'\mathrm{e}^{3x} &= 0,\\
2A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x} &= x,\\
3A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x} &= 0,\\
A'\mathrm{e}^{2x} &= -x,\\
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -x\mathrm{e}^{-2x},\\
A(x) &= \frac{2x+1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C,\\
2A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x} &= x,\\
2A'\mathrm{e}^{2x} + 2B'\mathrm{e}^{3x} &= 0,\\
B'\mathrm{e}^{3x} &= x,\\
\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= x\mathrm{e}^{-3x},\\
B(x) &= -\frac{3x+1}{9}\mathrm{e}^{-3x} + D.
\end{aligned}
$$
Agora, juntando tudo,
$$
\begin{aligned}
y(x) &= A(x)\mathrm{e}^{2x} + B(x)\mathrm{e}^{3x}\\
&= \left[\frac{2x+1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C\right]\mathrm{e}^{2x} + \left[-\frac{3x+1}{9}\mathrm{e}^{-3x} + D\right]\mathrm{e}^{3x}\\
&= \frac{6x+5}{36} + C\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{3x} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Encontre as 3 raízes complexas de

$$z^3 = 1.$$

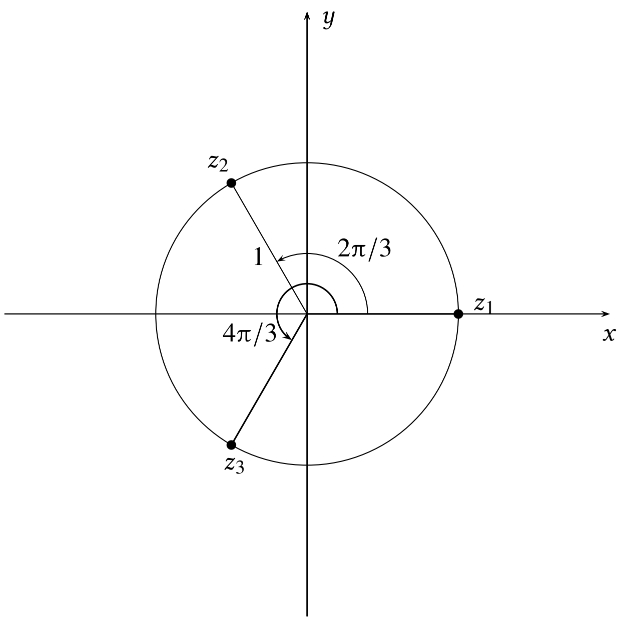
Deixe as 3 raízes explícitas e desenhe-as no plano complexo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} z^3 &= 1 = e^{i2k\pi}, \\ z &= re^{i\theta}, \\ z^3 &= r^3 e^{3i\theta}, \\ r^3 e^{i3\theta} &= e^{i2k\pi}, \\ r &= 1, \\ \theta &= \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

As 3 raízes são

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, \\ z_2 &= e^{i\frac{2\pi}{3}}, \\ z_3 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} \blacksquare \end{aligned}$$



Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Expanda a função complexa

$$f(z) = \frac{z-3}{z-7}$$

em série de Laurent em torno de $z = 3$ na região $|z-3| < 4$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Note que a região é do tipo $|z-3|/4 < 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{z-3}{z-7} &= \frac{z-3}{(z-3)-4} \\
&= \frac{\frac{z-3}{4}}{\frac{z-3}{4}-1} \\
&= -\frac{z-3}{4} \times \frac{1}{1-\frac{z-3}{4}} \\
&= -\frac{z-3}{4}\left[1 + \left(\frac{z-3}{4}\right) + \left(\frac{z-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{z-3}{4}\right)^3 + \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04B, 29 jun 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Resolva a EDO não-homogênea

$$x^2y'' + 7xy' + 6y = x.$$

a) [10] Encontre a solução da equação homogênea associada,

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

ou seja: encontre $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

b) [15] Faça

$$y(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x);$$

derive; force o termo envolvendo A' e B' a ser nulo; derive novamente e substitua. Produza um sistema de duas EDOs de ordem 1 em A e B. Resolva para $A(x)$ e $B(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) A equação homogênea associada é uma equação de Euler:

$$\begin{aligned}
x^2y_h'' + 7xy_h' + 6y_h &= 0,\\
y_h &= x^m,\\
y_h' &= mx^{m-1},\\
y_h'' &= (m-1)mx^{m-2},\\
[(m-1)m + 7m + 6]\,x^m &= 0,\\
m^2 + 6m + 6 &= 0,\\
m_1 &= +\sqrt{3} - 3,\\
m_2 &= -\sqrt{3} - 3,\\
y_h(x) &= c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}
\end{aligned}$$

b) Agora,

$$\begin{aligned}
y(x) &= A(x)x^{m_1} + B(x)x^{m_2},\\
y'(x) &= m_1Ax^{m_1} + m_2Bx^{m_2} + \underbrace{A'x^{m_1} + B'x^{m_2}}_{=0},\\
y''(x) &= (m_1-1)m_1Ax^{m_1-2} + (m_2-1)m_2Bx^{m_2-2} + m1A'x^{m_1-1} + m_2B'x^{m_2-1}.
\end{aligned}$$

Substituindo na EDO,

$$\begin{aligned}
x^2y'' + 7xy' + 6y &= x,\\
\underbrace{[(m_1-1)m_1 + 7m_1 + 6]}_{=0}A + \underbrace{[(m_2-1)m_2 + 7m_2 + 6]}_{=0}B + m_1A'x^{m_1+1} + m_2B'x^{m_2+1} &= x
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Ficamos com o sistema de EDO*s*

$$\begin{aligned} A'x^{m_1} + B'x^{m_2} &= 0, \\ m_1 A' x^{m_1+1} + m_2 B' x^{m_2+1} &= 0, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{(m_1 - m_2)(1 - m_1)} x^{1-m_1} + A_0, \\ B(x) &= \frac{1}{(m_2 - m_1)(1 - m_1)} x^{1-m_2} + B_0. \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} y(x) &= \left[\frac{1}{(m_1 - m_2)(1 - m_1)} + \frac{1}{(m_2 - m_1)(1 - m_1)} \right] x + A_0 x^{m_1} + B_0 x^{m_2} \\ &= \frac{x}{13} + A_0 x^{-3+\sqrt{3}} + B_0 x^{-3-\sqrt{3}} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Dada a função

$$f(z) = \ln(z - 1),$$

a) [10] Encontre o(s) ponto(s) de ramificação de f.

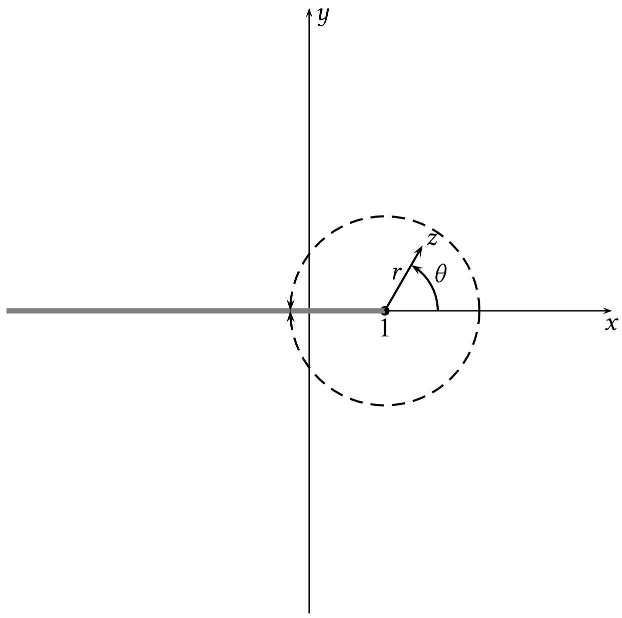
b) [15] **Desenhe** no plano complexo um corte que torne a função unívoca.

Sugestão: faça $z - 1 = re^{i\theta}$ e analise o que acontece.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Se $z - 1 = re^{i\theta}$,

$$\ln(z - 1) = \ln re^{i\theta} = \ln r + i\theta.$$

Claramente, se z der uma volta completa em torno de 1, $f(z)$ muda de valor; logo, $z = 1$ é o único ponto de ramificação.
b) Um corte possível é mostrado (linha cinza grossa) na figura abaixo, que limita θ a $-\pi < \theta \leq \pi$ ■



Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a série de Laurent de

$$f(x) = f(z) = \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2\mathrm{i})} - \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2)}$$

no disco $|z-2| < 2\sqrt{2}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se

$$f(z) = \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2\mathrm{i})} - \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2)},$$

o 2º termo já está no formato de um termo da série de Laurent desejada, e nós o deixamos como está. O 1º termo precisa ser reescrito:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2\mathrm{i})} &= \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)}\left[\frac{1}{(z-2)+(2-2\mathrm{i})}\right] \\
&= -\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)^2}\left[\frac{1}{\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}+1}\right] \\
&= -\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)^2}\left[\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}}\right]
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right| &= \frac{|z-2|}{|2-2\mathrm{i}|} \\
&= \frac{|z-2|}{2\sqrt{2}} < 1,
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}} = 1 - \frac{z-2}{2-2\mathrm{i}} + \left(\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right)^4 + \ldots$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f(z) = &-\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2)} \\
&-\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)^2}\left[1 - \frac{z-2}{2\mathrm{i}-2} + \left(\frac{z-2}{2\mathrm{i}-2}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2\mathrm{i}-2}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2\mathrm{i}-2}\right)^4 + \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Dada a equação diferencial ordinária

$$xy'' + xy' + y = 0:$$

a) [05] Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

b) [20] Obtenha **uma** solução de Frobenius do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Começo escrevendo a equação na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = y'' + y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

As funções

$$[xp(x)] = x, \qquad \text{e} \qquad [x^2q(x)] = x$$

são analíticas em $x = 0$, e $x = 0$ é um ponto singuar regular, em torno do qual é possível obter uma solução de Frobenius,

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1},\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial, encontro

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Faço agora no primeiro somatório:

$$\begin{aligned}
m + r &= n + r - 1,\\
m &= n - 1,\\
n &= m + 1,
\end{aligned}$$

e obtenho

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-1}^{\infty} (m+r)(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0,\\
(r-1)ra_0x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1)a_{n+1} + (n+r)a_n + a_n\right] x^{n+r} &= 0,\\
(r-1)ra_0x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1)a_{n+1} + (n+r+1)a_n\right] x^{n+r} &= 0.
\end{aligned}$$

É evidente que, com $a_0 \neq 0$, a equação indicial é

$$r(r-1) = 0 \ \Rightarrow\ r_2 = 0 \text{ ou } r_1 = 1.$$

As raízes diferem por um inteiro; ou a menor raiz leva a 2 soluções, ou não leva a nenhuma. Tentemos com a menor raiz ($r_2 = 0$):

$$\begin{aligned}
n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n &= 0,\\
a_{n+1} &= -\frac{1}{n}a_n.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Note que é impossível obter a_1 a partir de a_0: a recursão falha, e a menor raiz não leva a nenhuma solução. Uma única solução ainda é possível com a maior raiz $r_1 = 1$:

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} + (n+2)a_n = 0,$$
$$a_{n+1} = -\frac{1}{n+1}a_n.$$

Fazendo $a_0 = 1$ sem perda de generalidade, não é difícil encontrar o termo geral:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

e uma solução

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FA, 03 jul jun 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Considere a seguinte equação diferencial ordinária não linear:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \cos(y^2) = x^2; \qquad y(0) = 0.$$

Em princípio, ela não pode ser resolvida analiticamente, mas pode ser resolvida numericamente com facilidade com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Para a rotina padrão de solução com Runge-Kutta,

```
def rk4(x,y,h,ff):
    '''
    rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
    '''
    k1 = h*ff(x,y)
    k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
    k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
    k4 = h*ff(x+h,y+k3)
    yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
    return yn
```

basta escrever uma `ff` adequada. Escreva a `ff` que resolve a equação acima. **Indique a indentação cuidadosamente, com linhas verticais.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
def ff(x,y):
    return (x**2 - cos(y**2))**(0.5)
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Sabendo o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12,$$

obtenha

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

-36, pois o determinante é linear em cada linha ou coluna ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Sabendo que

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi=0}^{x} e^{-\xi^2}\, d\xi,$$

resolva a EDO

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 1, \qquad y(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $y = uv$ e substitua:

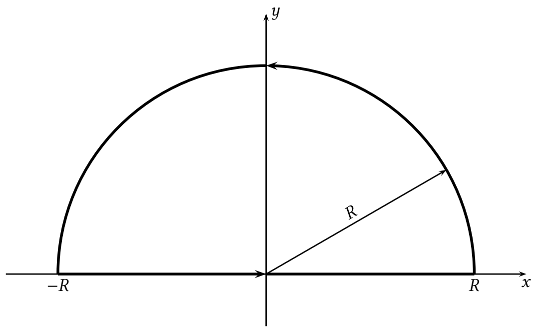
$$\begin{aligned}
u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - 2xuv &= 1\\
\underbrace{u\left[\frac{dv}{dx} - 2xv\right]}_{=0} + v\frac{du}{dx} &= 1\\
\frac{dv}{dx} - 2xv &= 0\\
\frac{dv}{v} &= 2x dx\\
\int_{v_0}^{v} \frac{d\eta}{\eta} &= 2\int_0^x \xi d\xi = x^2\\
\ln\frac{v}{v_0} &= x^2\\
v &= v_0 e^{x^2} \Rightarrow\\
v_0 e^{x^2}\frac{du}{dx} &= 1\\
u &= \frac{1}{v_0}\int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi + u_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2v_0}\operatorname{erf}(x) + u_0 \Rightarrow\\
y = uv &= \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2v_0}\operatorname{erf}(x) + u_0\right] v_0 e^{x^2}\\
y &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}\operatorname{erf}(x) + K e^{x^2}; \qquad y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Utilizando obrigatoriamente integração de contorno com variáveis complexas, calcule

$$I = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x.$$

onde x é o eixo dos reais e $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Utilize o contorno mostrado na figura ao lado.

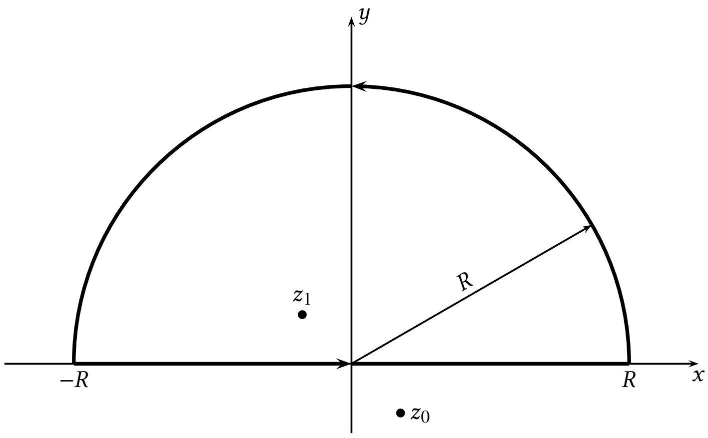


SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Considere a função $f(z) = 1/(z^2+\mathrm{i})$. Esta função possui singularidades em

$$\begin{aligned} z^2 + \mathrm{i} &= 0,\\ z^2 &= -\mathrm{i} = \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\pi/2+2k\pi)};\\ z &= \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\pi/4+k\pi)}. \end{aligned}$$

Consequentemente, apenas a singularidade em z_1 mostrada abaixo precisa ser considerada no teorema dos resíduos.



Para verificar a integral sobre o semi-círculo $\mathscr{L}_S$ quando $R \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \left| \int_{\mathscr{L}_S} \frac{1}{z^2+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z \right| &\le \lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{L}_S} \left| \frac{1}{z^2+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z \right| \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \left| \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+\mathrm{i}} \right| \mathrm{d}\theta \\ &\le \lim_{R\to\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \left| \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} \right| \mathrm{d}\theta = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{R} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema dos resíduos, devemos ter

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}c_{-1},$$

onde o resíduo c_{-1} em z_1 é calculado como se segue:

$$\frac{1}{z^2+\mathrm{i}} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)};$$

logo, nas proximidades de z_1,

$$f(z) \sim \frac{1}{(z_1-z_0)(z-z_1)},$$

Continue a solução no verso ⟹

donde z_1 é claramente um polo de primeira ordem, e

$$
\begin{aligned}
c_{-1} &= \frac{1}{(z_1 - z_0)} \\
&= \frac{1}{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]} \\
&= \frac{1}{-\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(-1+\mathrm{i})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-1-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}^2} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
I = 2\pi\mathrm{i}c_{-1} &= (2\pi\mathrm{i}) \times \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right] \\
= 2\pi\mathrm{i}c_{-1} &= (\pi\mathrm{i}) \times \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right] \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i}) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i}) \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Resolva a equação de Airy

$$y'' - xy = 0$$

em série de potências $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (note que $x = 0$ é um ponto regular, e que portanto isto não é o método de Frobenius); em particular mostre que se deve ter necessariamente $a_2 = 0$, e obtenha os 3 primeiros termos das séries que multiplicam, respectivamente, a_0 e a_1 (isto é: as duas soluções LI).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como sempre:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}.$$

Substituindo na equação diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Fazendo $n - 2 = m + 1$, isto é: fazendo $m = n - 3$,

$$0 = \sum_{m=-3}^{\infty} (m+2)(m+3) a_{m+3} x^{m+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1},$$
$$0 = \sum_{m=-1}^{\infty} (m+2)(m+3) a_{m+3} x^{m+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1},$$
$$0 = 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+3) a_{n+3} - a_n \right] x^{n+1}.$$

A relação de recorrência é

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+2)(n+3)}.$$

Claramente, $a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = 0$; partindo de $a_0 = 1$: $a_3 = 1/6, a_6 = 1/180, a_9 = 1/12960$; partindo de $a_1 = 1$: $a_4 = 1/12, a_7 = 1/504, a_{10} = 1/45360$, e as duas soluções LI são:

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \frac{x^9}{12960} + \ldots,$$
$$y_2(x) = x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \frac{x^{10}}{45360} + \ldots \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FB, 07 jul 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] A expressão

$$\mathcal{T}_m = \oint_{\mathscr{S}} \epsilon_{lim} r_l n_k T_{ki} \, \mathrm{d}A = \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A,$$

onde $\mathscr{S}$ é uma superfície fechada que limita uma região $\mathscr{C}$ do $\mathbb{R}^3$, e $\boldsymbol{n} = n_k \boldsymbol{e}_k$ é o vetor unitário normal a $\mathscr{S}$ apontando para fora em cada ponto, é um escalar.

a) [15] Identifique o vetor $\boldsymbol{v}$. Escreva-o da forma mais simples que você conseguir.

b) [10] Agora aplique o teorema da divergência à expressão acima. Não é necessário calcular a divergência que vai aparecer.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\boldsymbol{v} = \epsilon_{lim} r_l T_{ki} \boldsymbol{e}_k.$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_m &= \oint_{\mathscr{S}} \epsilon_{lim} r_l n_k T_{ki} \, \mathrm{d}A \\ &= \int_{\mathscr{C}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\epsilon_{lim} r_l T_{ki} \right) \, \mathrm{d}V \; \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = 3x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv;\\
\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} + \frac{uv}{x} &= 3x;\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{uv}{x} &= 3x;\\
u\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v}{x}\right]}_{=0} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 3x.\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v}{x} &= 0;\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{v}{x};\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x};\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}x}{x} &= 0;\\
\ln|v| + \ln|x| &= c_1;\\
\ln|vx| &= \mathrm{e}^{c_1};\\
vx &= \pm\mathrm{e}^{c_1} = v_0;\\
v &= \frac{v_0}{x}.\\
\frac{v_0}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 3x;\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{3}{v_0}x^2;\\
u(x) &= \frac{x^3}{v_0} + u_0;\\
y(x) &= \left[\frac{x^3}{v_0} + u_0\right]\frac{v_0}{x};\\
y(x) &= x^2 + \frac{C}{x} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Usando obrigatoriamente variáveis complexas, integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta}.$$

Sugestão: faça a transformação de variável $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ e transforme a integral acima em uma integral sobre o círculo unitário no plano complexo envolvendo um polo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Fazendo a substituição sugerida, se $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, quando θ vai de 0 a 2π, z percorre o círculo unitário C no plano complexo; então:

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \\ \mathrm{d}z &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} &= \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{z} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= 2\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}. \end{aligned}$$

Retornando à integral,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta} &= \oint_C \frac{1}{2 - \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\ &= \oint_C \frac{-2\mathrm{d}z}{z^2 - 4\mathrm{i}z - 1} \end{aligned}$$

O integrando possui dois polos, $z_1 = (2-\sqrt{3})\mathrm{i}$ e $z_2 = (2+\sqrt{3})\mathrm{i}$, mas apenas z_1 está dentro do círculo unitário. Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}c_{-1} \\ &= 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to z_1} \left[(z-z_1) \frac{-2}{(z-z_1)(z-z_2)} \right] \\ &= 2\pi\mathrm{i} \frac{-2}{z - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Obtenha as duas soluções LI de

$$y'' - x^3 y = 0$$

em torno de $x = 0$ na forma $y_{1,2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. **Para cada uma das duas soluções encontre obrigatoriamente os 4 primeiros termos.** Note que $x = 0$ é um ponto regular, e que não se trata de aplicar o método de Frobenius.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Compare com

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 :$$

Em $x = 0$, $xp(x) = 0$, é uma função analítica, e $x^2 q(x) = x^5$ também. O ponto $x = 0$ é um ponto *regular*. Não se trata, portanto, de aplicar o método de Frobenius, mas sim de procurar uma solução em série simples,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = 0.$$

Tente

$$\begin{aligned} m - 2 = n + 3 \Rightarrow m = n + 5; n = 0 \Rightarrow m = 5 : \\ \sum_{m=0}^{\infty} (m-1) m a_m x^{m-2} - \sum_{m=5}^{\infty} a_{m-5} x^{m-2} = 0, \\ \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) m a_m x^{m-2} - \sum_{m=5}^{\infty} a_{m-5} x^{m-2} = 0, \\ 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0, \\ 6a_3 x = 0 \Rightarrow a_3 = 0, \\ 12a_4 x^2 = 0 \Rightarrow a_4 = 0, \\ \sum_{m=5}^{\infty} \left[(m-1) m a_m - a_{m-5}\right] x^{m-2} = 0. \end{aligned}$$

Claramente, as constantes arbitrárias da solução geral são a_0 e a_1. A relação de recorrência é

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{a_{m-5}}{(m-1)m} : \\ a_5 &= \frac{a_0}{20}, & a_6 &= \frac{a_1}{30} \\ a_{10} &= \frac{a_0}{1800}, & a_{11} &= \frac{a_1}{3300} \\ a_{15} &= \frac{a_0}{378000}, & a_{16} &= \frac{a_1}{792000} \\ a_{20} &= \frac{a_0}{14364000}, & a_{21} &= \frac{a_1}{332640000} \\ &\ldots \end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned} y(x) = a_0 &\left[1 + x^5/20 + x^{10}/1800 + x^{15}/378000 + x^{20}/14364000 + \ldots\right] \\ + a_1 &\left[x + x^6/30 + x^{11}/3300 + x^{16}/792000 + x^{21}/332640000 + \ldots\right] \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$