TEA013 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01A, 29 out 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Sabendo que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} &= \frac{1}{s-a},\\ \mathscr{L}\left\{t\right\} &= \frac{1}{s^2},\\ \mathscr{L}\left\{f'(t)\right\} &= s\overline{f}(s) - f(0),\end{aligned}$$

e utilizando **obrigatoriamente** a transformada de Laplace, resolva a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{T} = \frac{x_0 t}{T^2}, \qquad x(0) = x_0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} + \frac{x}{T} &= \frac{x_0 t}{T^2}\\ \overline{x} - x_0 + \frac{\overline{x}}{T} &= \frac{x_0}{(sT)^2}\\ \overline{x}\left(\frac{sT+1}{T}\right) &= x_0\left[\frac{(sT)^2+1}{(sT)^2}\right]\\ \overline{x} &= x_0\frac{1+(sT)^2}{Ts^2(sT+1)} = x_0\left[\frac{2T}{sT+1} + \frac{1}{Ts^2} - \frac{1}{s}\right]\\ &= x_0\left[\frac{2}{s+\frac{1}{T}} + \frac{1}{Ts^2} - \frac{1}{s}\right] \Rightarrow\\ x(t) &= x_0\left[2e^{-\frac{t}{T}} + \frac{t}{T} - 1\right] \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Utilizando **obrigatoriamente** o Teorema da Convolução, calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)}\frac{a}{(s^2+a^2)}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{f(t)*g(t)\right\} &= \overline{f}(s)\overline{g}(s),\\
\overline{f}(s) &= \frac{1}{s+a} \Rightarrow f(t) = \mathrm{e}^{-at},\\
\overline{g}(s) &= \frac{a}{(s^2+a^2)} \Rightarrow g(t) = \operatorname{sen}(at),\\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)}\frac{a}{(s^2+a^2)}\right\} &= f(t)*g(t)\\
&= \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-a(t-\tau)}\operatorname{sen}(a\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \mathrm{e}^{-at}\int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{a\tau}\operatorname{sen}(a\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \frac{1}{2a}\left[\operatorname{sen}(at) - \cos(at) + \mathrm{e}^{-at}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] O *loop* principal de um método explícito de solução da equação da onda cinemática

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

é

```
old = 0
new = 1
c = 2.0                       # celeridade da onda
cou = c*dt/(dx)               # número de Courant
for n in range(nt):           # loop no tempo
   for i in range(1,nx):      # loop no espaço
      u[new,i] = u[old,i] - cou*(u[old,i] - u[old,i-1])
   u[new,0] = 0.0
   u[new,nx] = 0.0
   u[new].tofile(fou)         # imprime uma linha com os novos dados
```

Preencha as aproximações de derivadas utilizadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \ldots,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \ldots,$$

onde o lado direito deve conter (no máximo) u_i^n, u_{i-1}^n, u_{i+1}^n, u_i^{n+1}, Δt, e Δx.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}.$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Considere a seguinte discretização de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(onde $c > 0$ é constante) ($t_n = n\Delta t$; $x_i = i\Delta x$):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}.$$

Faça uma análise completa de estabilidade de von Neumann do esquema em função do número de Courant $\mathrm{Co} = (c\Delta t)/\Delta x$. Descubra se o esquema é incondicionalmente instável, condicionalmente estável, ou incondicionalmente estável. Se o esquema for condicionalmente estável, para que valores de Co ele é estável?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação é linear. O esquema é explícito, e temos

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n &= -\mathrm{Co}\left[u_{i+1}^n - u_i^n\right], \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \mathrm{Co}\left[u_{i+1}^n - u_i^n\right], \\ u_i^{n+1} &= [1 + \mathrm{Co}]\, u_i^n - \mathrm{Co} u_{i+1}^n. \end{aligned}$$

Substituindo um modo do erro de arredondamento

$$\epsilon_i^n = \sum_l \xi_l \mathrm{e}^{at} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i}$$

no esquema de diferenças,

$$\begin{aligned} \xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= [1 + \mathrm{Co}]\, \xi_l \mathrm{e}^{at_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{Co}\xi_l \mathrm{e}^{at_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i+1)\Delta x}, \\ \mathrm{e}^{a\Delta t} &= [1 + \mathrm{Co}] - \mathrm{Co}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x}. \end{aligned}$$

Faça

$$\theta = k_l \Delta x.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{a\Delta t} &= [1 + \mathrm{Co}] - \mathrm{Co}[\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)] \\ &= [1 + \mathrm{Co}(1 - \cos(\theta))] - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(\theta); \\ \left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 &= \left[1 + 2\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta)) + \mathrm{Co}^2(1 - \cos(\theta))^2\right] + \mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) \\ &= 1 + 2\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta)) + \mathrm{Co}^2(1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) + \mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) \\ &= 1 + 2\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta)) - 2\cos(\theta)\mathrm{Co}^2 + 2\mathrm{Co}^2 \\ &= 1 + 2\mathrm{Co} + 2\mathrm{Co}^2 - \cos(\theta)\left[2\mathrm{Co} + 2\mathrm{Co}^2\right] \\ &= 1 + 2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right][1 - \cos(\theta)]\,. \end{aligned}$$

Desejamos

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 = 1 + 2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right][1 - \cos(\theta)] &\le 1; \\ 2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right][1 - \cos(\theta)] &\le 0. \end{aligned}$$

Isso é impossível: $[1 - \cos(\theta)] \ge 0$ sempre, assim como $\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right]$. O esquema é, portanto, incondicionalmente instável
■

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01B, 04 nov 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Sabendo que

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a},$$

Calcule a transformada de Laplace do $\cosh(t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\cosh(t)\right\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathscr{L}\left\{e^{t}\right\} + \mathscr{L}\left\{e^{-t}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+1+s-1}{s^2-1^2} \\
&= \frac{s}{s^2-1^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, resolva

$$x'' - 7x' + 12x = \operatorname{sen}(t), \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
x'' - 7x' + 12x &= \operatorname{sen}(t),\\
s^2\overline{x} - sx(0) - x'(0) - 7[s\overline{x} - x(0)] + 12\overline{x} &= \frac{1}{s^2+1},\\
(s^2 - 7s + 12)\overline{x} - 1 &= \frac{1}{s^2+1},\\
(s^2 - 7s + 12)\overline{x} &= 1 + \frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2+2}{s^2+1},\\
\overline{x} &= \frac{s^2+2}{(s^2-7s+12)(s^2+1)},\\
\overline{x} &= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}\\
&= \frac{7s+11}{170(s^2+1)} - \frac{11}{10}\frac{1}{s-3} + \frac{18}{17}\frac{1}{s-4};\\
x(t) &= \frac{7}{170}\cos(t) + \frac{11}{170}\operatorname{sen}(t) - \frac{11}{10}\mathrm{e}^{3t} + \frac{18}{17}\mathrm{e}^{4t} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Podemos discretizar a equação da onda cinemática como

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{2\Delta x}.$$

Calcule o fator de amplificação complexo $\mathrm{e}^{a\Delta t}$ desse esquema em função do número de Courant Co, de um número de onda k_l arbitrário (um modo de Fourier qualquer), e de Δx.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Escrevemos o esquema em termos do número de Courant como:

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}[3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n];\\
u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}[3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n].
\end{aligned}$$

Cada modo de Fourier do erro de arredondamento obedece à mesma equação:

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x}\\
&\quad - \frac{\mathrm{Co}}{2}[3\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - 4\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x} + \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-2)\Delta x}];\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}[3 - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k_l\Delta x}] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Calcule

$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} \underbrace{H(\xi - a)}_{u}\,\underbrace{\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{\mathrm{d}v} &= uv\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} v\mathrm{d}u;\\
\mathrm{d}u &= \delta(\xi - a);\\
v &= \operatorname{sen}(x);\\
\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= H(\xi - a)\operatorname{sen}(\xi)\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} \operatorname{sen}(\xi)\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}x\\
&= H(x-a)\operatorname{sen}(x) - H(x-a)\operatorname{sen}(a)\\
&= H(x-a)\left[\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)\right] \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 03 dez 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Utilizando **obrigatoriamente** o Teorema da Convolução, calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{gathered}s^2-3s+2=(s-1)(s-2);\\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}.\end{gathered}$$

Mas

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}&=\mathrm{e}^{t},\\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}&=\mathrm{e}^{2t},\\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}&=\int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{e}^{2\tau}\,\mathrm{d}\tau\\ &=\mathrm{e}^{t}\int_0^t \mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\\ &=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t} \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial e

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\to \mathbb{C} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\mapsto \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \end{aligned}$$

é um produto interno, enumere as 5 propriedades que o definem adotadas neste curso.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As propriedades definidoras do produto interno são:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^*, \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle, \\ \langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle &= \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &> 0, \ \ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= 0, \ \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Calcule a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ +1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}; \\
c_0 &= \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \mathrm{e}^0 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) \,\mathrm{d}x \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Se $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} \,\mathrm{d}x, \\
a &= -1, \\
b &= +1, \\
L &= 2, \\
c_n &= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^{0} (-1) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+1} (+1) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} \,\mathrm{d}x \right] \\
&\vdots \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\pi n} \left[(-1)^n - 1 \right]; \\
f(x) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=+\infty} \frac{\mathrm{i}}{\pi n} \left[(-1)^n - 1 \right] \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} n x} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Sabendo que, se $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(m\pi x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n, \end{cases}$$

calcule a série de Fourier **trigonométrica** de

$$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x), \qquad -1 \le x \le +1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right).$$

Mas $f(x)$ é ímpar; logo, $A_n = 0$.

$$\begin{aligned} a &= -1, \\ b &= +1, \\ L &= 2, \\ B_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(\pi x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq 1, \\ 1 & n = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de $f(x)$ é a própria função:

$$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02B, 10 dez 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Sabendo que

$$\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(kx)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{snl}(k)\frac{\pi a^2 \mathrm{e}^{-a|k|}}{2}, \qquad a>0, \qquad \mathrm{snl}(k) = \begin{cases} +1, & k>0 \\ 0, & k=0 \\ -1, & k<0 \end{cases}$$

calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}, \qquad a>0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(kx)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x}_{=0} - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(kx)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{x=0}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(kx)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\pi}\,\mathrm{snl}(k)\frac{\pi a^2 \mathrm{e}^{-a|k|}}{2} \\
&= -\mathrm{i}\,\mathrm{snl}(k)\frac{a^2 \mathrm{e}^{-a|k|}}{2} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] **Sem utilizar frações parciais**, encontre a transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Uso o teorema da convolução,

$$\mathscr{L}[f*g] = \overline{f}(s)\overline{g}(s) \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{f}(s)\overline{g}(s)\right\} = \int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Mas

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f(t) = 1, \quad \overline{g}(s) = \frac{1}{s^2+4} \Rightarrow g(t) = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2},$$

donde

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_{\tau=0}^{t} \frac{\operatorname{sen}(2(t-\tau))}{2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1-\cos(2t)}{4} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] O produto interno canônico de duas funções *reais* $F(x)$ e $G(x)$ no intervalo $[a, b]$ é

$$\langle F, G\rangle \equiv \int_a^b F(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sejam $f(x)$ uma função real qualquer em $[a, b]$, e

$$F(x) = xf(x),$$
$$G(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Usando a desigualdade de Schwarz, obtenha o lado direito (ou seja: preencha os 3 pontos) de

$$\left|\int_a^b xf(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right| \le \ldots$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$|\langle F, G\rangle| \le \sqrt{\langle F, F\rangle}\sqrt{\langle G, G\rangle}\,;$$
$$\left|\int_a^b xf(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right| \le \left[\int_a^b |xf(x)|^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}\left[\int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Sabendo que

$$\mathscr{F}\left\{\mathrm{e}^{-m|x|}\right\} = \frac{1}{\pi}\frac{m}{(m^2+k^2)},$$

e utilizando o teorema de Parseval na forma

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2\,\mathrm{d}k,$$

obtenha

$$\int_{k=0}^{\infty} \frac{m^2}{(m^2+k^2)^2}\,\mathrm{d}k.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\int_{x=-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-m|x|}\right)^2\,\mathrm{d}x &= 2\pi\int_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \frac{m^2}{(m^2+k^2)^2}\,\mathrm{d}k\\
\int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2m|x|}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{m^2}{(m^2+k^2)^2}\,\mathrm{d}k\\
2\int_{x=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2mx}\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{\pi}\int_{k=0}^{+\infty} \frac{m^2}{(m^2+k^2)^2}\,\mathrm{d}k\\
2\times\frac{1}{2m} &= \frac{4}{\pi}\int_{k=0}^{+\infty} \frac{m^2}{(m^2+k^2)^2}\,\mathrm{d}k\\
\frac{\pi}{4m} &= \int_{k=0}^{+\infty} \frac{m^2}{(m^2+k^2)^2}\,\mathrm{d}k \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03A, 21 jan dez 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Obtenha a função de Green de

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - (\operatorname{tgh}(x))y = f(x), \qquad y(0) = y_0.
$$

Atenção! $\operatorname{tgh}(x) = \operatorname{senh}(x)/\cosh(x)$ é a tangente **hiperbólica**. Lembre-se de que

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\operatorname{senh}(x)}{\mathrm{d}x} &= \cosh(x);\\
\frac{\mathrm{d}\cosh(x)}{\mathrm{d}x} &= \operatorname{senh}(x).
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - G(x,\xi)(\operatorname{tgh}(\xi))y &= G(x,\xi)f(\xi)\\
\int_0^\infty G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)(\operatorname{tgh}(\xi))y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}y\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)(\operatorname{tgh}(\xi))y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,0)y(0) - \int_0^\infty\left[\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + (\operatorname{tgh}(\xi))G\right]y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

Nesse ponto, nós desejamos:

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + (\operatorname{tgh}(\xi))G &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Não é uma boa idéia usar transformada de Laplace, por causa da $\operatorname{tgh}(\xi)$; façamos $G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi)$, e prossigamos.

$$
\begin{aligned}
u\frac{dv}{d\xi} + v\frac{du}{d\xi} + (\operatorname{tgh}(\xi))uv &= \delta(\xi - x), \\
u\left[\frac{dv}{d\xi} + (\operatorname{tgh}(\xi))v\right] + v\frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x) \\
\frac{dv}{d\xi} &= -v\operatorname{tgh}(\xi) \\
\frac{dv}{v} &= -\operatorname{tgh}(\xi)d\xi \\
\int_{v(x,0)}^{v(x,\xi)} \frac{dv}{v} &= -\int_0^{\xi} \operatorname{tgh}(\xi')\, d\xi' \\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= -\ln(\cosh(\xi)) \\
v(x,\xi) &= \frac{v(x,0)}{\cosh(\xi)};
\end{aligned}
$$

Seguimos para u:

$$
\begin{aligned}
\frac{v(x,0)}{\cosh(\xi)}\frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x), \\
v(x,0)\int_{u(x,0)}^{u(x,\xi)} du &= \int_0^{\xi} \cosh(\eta)\delta(\eta - x)\, d\eta \\
v(x,0)[u(x,\xi) - u(x,0)] &= \cosh(x)H(\xi - x) \\
u(x,\xi) &= u(x,0) + \frac{\cosh(x)}{v(x,0)}H(\xi - x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi) &= u(x,0)\frac{v(x,0)}{\cosh(\xi)} + \frac{\cosh(x)}{\cosh(\xi)}H(\xi - x) \\
&= \frac{G(x,0)}{\cosh(\xi)} + \frac{\cosh(x)}{\cosh(\xi)}H(\xi - x) \\
&= \frac{1}{\cosh(\xi)}\left[G(x,0) + \cosh(x)H(\xi - x)\right].
\end{aligned}
$$

Isso já nos permite avaliar o comportamento de $G(x,\infty)$:

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= \frac{1}{\cosh(\infty)}\left[G(x,0) + \cosh(x)\right], \\
G(x,0) &= -\cosh(x).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= \frac{1}{\cosh(\xi)}\left[-\cosh(x) + \cosh(x)H(\xi - x)\right] \\
&= \frac{\cosh(x)}{\cosh(\xi)}\left[-1 + H(\xi - x)\right] \\
&= -[1 - H(\xi - x)]\frac{\cosh(x)}{\cosh(\xi)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Mostre que

$$x > \operatorname{tgh}(x), \qquad \forall x > 0,$$

ou seja: que não é possível encontrar nenhum $x > 0$ tal que

$$x = \operatorname{tgh}(x).$$

Sugestão: mostre que

$$\begin{aligned} E(x) &= x - \operatorname{tgh}(x) \\ &= \frac{x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando as séries de Taylor

$$\begin{aligned} x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \\ (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

encontre a expressão para a_{2n+1} em

$$E(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}.$$

(atenção para o início do somatório em $n = 1$: por quê?) Qual é o sinal de a_{2n+1} na expressão acima? Qual é o sinal de $E(x)$? Por que isso prova que $x > \operatorname{tgh}(x)$ para $x > 0$?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}(x) &= \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}; \\ \operatorname{senh}(x) &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}; \\ \cosh(x) &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}; \\ E(x) &= x - \operatorname{tgh}(x) \\ &= x - \frac{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} \\ &= x - \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)-2}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}; \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_{2n+1} = \frac{4n}{(2n+1)!}.$$

Mas $a_1 = 0$, donde

$$E(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

Para $n \geq 1$, $a_{2n+1} > 0$, assim como x^{2n+1} (pois $x > 0$), de maneira que o numerador da expressão acima é positivo; o denominador também é, e consequentemente $E(x) > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} x - \operatorname{tgh}(x) &> 0; \\ x &> \operatorname{tgh}(x), \qquad \forall x > 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Dado o problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) + y'(0) = 0,\ y(1) = 0,$$

Discuta os sinais de λ, e obtenha as equações transcedentais (ou os valores) para **todos** os autovalores (uma equação transcedental é uma equação que não pode ser resolvida algebricamente). Você pode usar o resultado da questão **2**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Discutimos os sinais:
$\lambda < 0$:

$$y(x) = A\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x),$$
$$y'(x) = \sqrt{-\lambda}\left[B\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + A\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x)\right].$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$A + \sqrt{-\lambda}B = 0,$$
$$\cosh(\sqrt{-\lambda})A + \mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda})B = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & +\sqrt{-\lambda} \\ \cosh(\sqrt{-\lambda}) & \mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para termos $(A, B) \neq (0, 0)$, é necessário que

$$\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}) - \sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}) = 0$$

Para economizar lápis: $\xi = \sqrt{-\lambda} > 0$, e

$$\mathrm{senh}(\xi) - \xi\cosh(\xi) = 0,$$
$$\mathrm{tgh}(\xi) = \xi,$$

que não possui soluçao para $\xi > 0$, conforme vimos na questão **2**; logo $\lambda < 0$ não pode ser autovalor.
$\lambda = 0$:

$$y = Ax + B,$$
$$y' = A$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$A + B = 0,$$
$$A + B = 0,$$

donde

$$A = -B,$$

de forma que $\lambda = 0$ é um autovalor, e uma autofunção associada é

$$y_0(x) = x - 1.$$

$\lambda > 0$:

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x),$$
$$y'(x) = \sqrt{\lambda}\left[-A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)\right]$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$A + \sqrt{\lambda}B = 0,$$
$$\cos(\sqrt{\lambda})A + \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda})B = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & +\sqrt{\lambda} \\ \cos(\sqrt{\lambda}) & \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou, impondo que o determinante seja nulo para permitir $A \neq 0$ e/ou $B \neq 0$:

$$\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n}) - \sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}) = 0$$
$$\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}) = \sqrt{\lambda_n} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Encontre $\phi(x,t)$ pelo método das características:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{senh}(t)\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \qquad \phi(x,0) = f(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $\phi(x,t) = F(s)$ sobre $x = X(s)$ e $t = T(s)$:

$$\begin{aligned}
\phi(X(s),T(s)) &= F(s);\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s};\\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1 \Rightarrow T(s) = \underbrace{T(0)}_{\equiv 0} + s,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= \operatorname{senh}(t) = \operatorname{senh}(s),\\
\int_{X(0)}^{X(s)} \mathrm{d}\xi &= \int_0^s \operatorname{senh}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\\
X(s) - X(0) &= \cosh(s) - 1 \Rightarrow X(s) = X(0) + \cosh(s) - 1.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{senh}(t)\frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= 0,\\
F(s) &= F(0)\\
\phi(x,t) &= F(0) = f(X(0)) = f(x - \cosh(t) + 1) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03B, 27 jan dez 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Obtenha a função de Green de

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{x}{x+1}y = f(x), \qquad y(0) = y_0.
$$

Você pode usar

$$
\int_{\eta=0}^{\xi} \frac{\eta}{\eta+1}\,\mathrm{d}\eta = \xi + \ln\left(\frac{1}{\xi+1}\right).
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - G(x,\xi)\frac{\xi}{\xi+1}y &= G(x,\xi)f(\xi)\\
\int_0^\infty G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{\xi}{\xi+1}y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}y\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{\xi}{\xi+1}y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,0)y(0) - \int_0^\infty \left[\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\xi}{\xi+1}G\right]y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

Nesse ponto, nós desejamos:

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\xi}{\xi+1}G &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Façamos $G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi)$:

$$
\begin{aligned}
\left[u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right] + \frac{\xi}{\xi+1}uv &= \delta(\xi - x),\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\xi}{\xi+1}v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} &= -v\frac{\xi}{\xi+1}\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{\xi}{\xi+1}\mathrm{d}\xi\\
\int_{v(x,0)}^{v(x,\xi)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\int_{\eta=0}^{\xi} \frac{\eta}{\eta+1}\,\mathrm{d}\eta\\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= -\int_{u=1}^{\xi+1} \frac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u\\
&= -\int_{u=1}^{\xi+1} \left(1 - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\\
&= -\left[u - \ln(u)\right]_1^{\xi+1} = -\xi + \ln(\xi+1);\\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= -\xi + \ln(\xi+1);\\
\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= \exp\left[-\xi + \ln(\xi+1)\right],\\
v(x,\xi) &= v(x,0)\mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1).
\end{aligned}
$$

Seguimos para u:

$$
\begin{aligned}
v(x,0)\mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x),\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{1}{v(x,0)}\mathrm{e}^{+\xi}\frac{1}{(\xi+1)}\delta(\xi - x);\\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{v(x,0)}\mathrm{e}^{\xi}\frac{1}{(\xi+1)}\delta(\xi - x)\,\mathrm{d}\xi;\\
\int_{u(x,0)}^{u(x,\xi)} \mathrm{d}u &= \frac{1}{v(x,0)}\int_{\eta=0}^{\xi} \mathrm{e}^{\eta}\frac{1}{(\eta+1)}\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta,\\
u(x,\xi) &= u(x,0) + \frac{1}{v(x,0)}H(\xi - x)\left(\mathrm{e}^{x}\frac{1}{(x+1)}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi) &= \left[u(x,0) + \frac{1}{v(x,0)}H(\xi - x)\left(\mathrm{e}^{x}\frac{1}{(x+1)}\right)\right]v(x,0)\mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1)\\
&= G(x,0)\mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1) + H(\xi - x)\mathrm{e}^{x-\xi}\frac{\xi+1}{x+1}.
\end{aligned}
$$

Isso já nos permite avaliar o comportamento de $G(x,\infty)$:

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= \mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1)\left[G(x,0) + \frac{\mathrm{e}^{x}}{(x+1)}\right],\\
G(x,0) &= -\frac{\mathrm{e}^{x}}{(x+1)}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
G(x,\xi) = \mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1)\left[\frac{\mathrm{e}^{x}}{(x+1)}\left(H(\xi - x) - 1\right)\right] \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Obtenha todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville

$$
\begin{aligned}
y'' + \lambda y &= 0,\\
y'(0) &= 0,\\
y'(1) &= 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se $\lambda < 0$, faça $\lambda = -k^2$ para $k > 0$;

$$
\begin{aligned}
r^2 - k^2 &= 0,\\
r &= \pm k,\\
y(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx),\\
y'(x) &= k\left[A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cos(kx)\right].
\end{aligned}
$$

As condições de contorno homogêneas produzem

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= kB \ \Rightarrow B = 0,\\
y'(1) &= k[A\,\mathrm{senh}(k) + B\cosh(k)] = kA\,\mathrm{senh}(k) \ \Rightarrow A = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, a única solução possível é $A = B = 0$, e $\lambda < 0$ não pode ser autovalor.

Para $\lambda = 0$,

$$
\begin{aligned}
y'' &= 0,\\
y(x) &= Ax + B,\\
y'(x) &= A.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno homogêneas produzem

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= 0 \ \Rightarrow A = 0,\\
y'(1) &= 0 \ \Rightarrow A = 0,
\end{aligned}
$$

Portanto $A = 0$, e B é qualquer valor. $\lambda = 0$ é autovalor, e uma autofunção associada é $y_0 = 1$.

Para $\lambda > 0$, faça $\lambda = k^2$, para $k > 0$:

$$
\begin{aligned}
r^2 + k^2 &= 0,\\
r^2 &= -k^2,\\
r &= \pm k\mathrm{i},\\
y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
y'(x) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right].
\end{aligned}
$$

As condições de contorno homogêneas produzem

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= kB = 0 \ \Rightarrow B = 0,\\
y'(1) &= k[-A\,\mathrm{sen}(k) + B\cos(k)] = -kA\,\mathrm{sen}(k) = 0;
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(k) &= 0,\\
k &= n\pi,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

Os autovalores não-nulos portanto são

$$
\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
$$

e as autofunções correspondentes são

$$
y_n(x) = \cos(n\pi x) \ \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Utilizando o método de separação de variáveis, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\
\phi(x,0) &= f(x).
\end{aligned}
$$

Sugestão:As condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser resolvido com a transformação

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \phi(x,t) - \phi_0 \;\Rightarrow\\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t},\\
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},\\
\psi(0,t) &= 0,\\
\frac{\partial \psi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\
\psi(x,0) &= f(x) - \phi_0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Fazemos agora $\psi(x,t) = X(x)T(t)$; a equação fica

$$
\begin{aligned}
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2};\\
\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda.
\end{aligned}
$$

O problema de Sturm-Liouville é

$$
\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0,\; X'(L) = 0.
$$

O problema é difusivo. É razoável proibir $\lambda > 0$. Sempre vale a pena, entretanto, testar $\lambda = 0$: a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A + Bx;\\
X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0,\\
X'(L) = 0 &\Rightarrow B = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor. Para $\lambda = -k^2 < 0$, com $k > 0$, a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
X'(x) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right]
\end{aligned}
$$

Impondo as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0,\\
X'(L) = 0 &\Rightarrow kB\cos(kL) = 0;\\
\cos(kL) = 0 &\Rightarrow\\
kL &= -\frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n-1)\pi}{2L};\\
\lambda_n &= -\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}.
\end{aligned}
$$

A equação em $T_n(t)$ é

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha^2 T_n}\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} &= -\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2};\\
\frac{\mathrm{d}T_n}{T_n} &= -\frac{\alpha^2(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}\,\mathrm{d}t;\\
T_n(t) &= T_0 \exp\left[-\frac{\alpha^2(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}t\right].
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

A solução geral é da forma

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{e}^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).$$

Em $t = 0$:

$$f(x) - \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),$$

$$[f(x) - \phi_0] \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right),$$

$$\int_0^L [f(x) - \phi_0] \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x = B_m \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x,$$

$$B_m = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - \phi_0] \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Encontre $\phi(x,t)$ pelo método das características:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{senh}(t)\frac{\partial\phi}{\partial x} = x, \qquad \phi(x,0) = f(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $\phi(x,t) = F(s)$ sobre $x = X(s)$ e $t = T(s)$:

$$\begin{aligned}
\phi(X(s),T(s)) &= F(s);\\
\frac{dF}{ds} &= \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{dT}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dX}{ds};\\
\frac{dT}{ds} &= 1 \Rightarrow T(s) = \underbrace{T(0)}_{\equiv 0} + s,\\
\frac{dX}{ds} &= \operatorname{senh}(t) = \operatorname{senh}(s),\\
\int_{X(0)}^{X(s)} d\xi &= \int_0^s \operatorname{senh}(\tau)\,d\tau,\\
X(s) - X(0) &= \cosh(s) - 1 \Rightarrow X(s) = X(0) + \cosh(s) - 1.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{senh}(t)\frac{\partial\phi}{\partial x} &= x,\\
\frac{dF}{ds} &= X(s) = X(0) + \cosh(s) - 1,\\
dF &= [X(0) + \cosh(s) - 1]\,ds,\\
\int_{\xi=0}^{s} dF &= \int_{\xi=0}^{s} [X(0) - 1 + \cosh(s)]\;d\xi\\
F(s) - F(0) &= [X(0) - 1]s + \operatorname{senh}(s) - \cancelto{0}{\operatorname{senh}(0)}\\
\phi(x,t) &= \phi(X(s),T(s))\\
&= F(s) = F(0) + [X(0) - 1]s + \operatorname{senh}(s)\\
&= \phi(X(0),T(0)) + [X(0) - 1]s + \operatorname{senh}(s)\\
&= f(X(0)) + [(X(s) - \cosh(s) + 1) - 1]s + \operatorname{senh}(s)\\
&= f(x - \cosh(t) + 1) + (x - \cosh(t))t + \operatorname{senh}(t) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 10 fev 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Se

$$
\widehat{g}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & |k| \le k_0, \\ 0 & |k| > k_0, \end{cases}
$$

calcule $g(x)$, onde $g(x) \leftrightarrow \widehat{g}(k)$ são um par de transformadas direta e inversa de Fourier.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
&= \int_{-k_0}^{+k_0} \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}x} \int_{-\mathrm{i}k_0x}^{+\mathrm{i}k_0x} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} \mathrm{d}(\mathrm{i}kx) \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}x} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0x} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}x} \left[(\cos(k_0x) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k_0x)) - (\cos(k_0x) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k_0x)) \right] \\
&= \frac{2\mathrm{i}}{2\pi \mathrm{i}x}\,\mathrm{sen}(k_0x) = \frac{\mathrm{sen}(k_0x)}{\pi x} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Se $\boldsymbol{L}$ é um operador linear, define-se seu operador adjunto $\boldsymbol{L}^\#$ por

$$\left\langle \boldsymbol{L}^\# \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle \equiv \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{y} \rangle, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V},$$

onde $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial. Calcule $(\alpha \boldsymbol{L})^\#$ em função de α e de $\boldsymbol{L}^\#$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\left\langle (\alpha \boldsymbol{L})^\# \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \alpha \left\langle \boldsymbol{L}^\# \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle \\
&= \left\langle (\alpha^* \boldsymbol{L}^\#) \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle,
\end{aligned}$$

donde

$$(\alpha \boldsymbol{L})^\# = \alpha^* L^\# \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Dado o problema de Sturm-Liouville

$$
\begin{aligned}
y'' + \lambda y &= 0,\\
y'(0) &= 0,\\
y(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

obtenha todos os autovalores λ.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Estudamos os sinais de λ:
Caso I: $\lambda = -k^2 < 0$:

$$
\begin{aligned}
y'' - k^2 y &= 0,\\
r^2 - k^2 &= 0,\\
r &= \pm k,\\
y(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx),\\
y'(x) &= k\left[A\,\mathrm{senh}(x) + B\cosh(kx)\right],\\
y'(0) &= kB = 0,\\
y(1) &= A\cosh(k) + B\,\mathrm{senh}(k) = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $B = 0$, $A = 0$ e $\lambda < 0$ não pode ser autovalor.
Caso II: $\lambda = 0$:

$$
\begin{aligned}
y'' &= 0,\\
y(x) &= Ax + B,\\
y'(x) &= A,\\
y'(0) &= A = 0,\\
y(1) &= A + B = 0
\end{aligned}
$$

Portanto, $A = 0$, $B = 0$, e $\lambda = 0$ não pode ser autovalor.
Caso III: $\lambda = k^2 > 0$:

$$
\begin{aligned}
y'' + k^2 y &= 0,\\
r^2 + k^2 &= 0,\\
r^2 &= -k^2,\\
r &= \pm \mathrm{i},\\
y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
y'(x) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right],\\
y'(0) &= kB = 0,\\
y(1) &= A\cos(k) + B\,\mathrm{sen}(k) = 0;
\end{aligned}
$$

Portanto, $B = 0$ e devemos ter

$$
\begin{aligned}
A\cos(k) &= 0,\\
\cos(k) &= 0,\\
k_n &= \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\\
\lambda_n &= \left[\frac{\pi}{2} + n\pi\right]^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Encontre $\phi(x,y)$ pelo método das características:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + y\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \qquad \phi(0,y) = g(y).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $x = X(s)$ e $y = Y(x)$:

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \phi(X(s),Y(s)) = F(s);\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} = 0;\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= 1 \;\Rightarrow\; X(s) = \cancelto{0}{X(0)} + s,\\
\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} &= y = Y(s) \;\Rightarrow\\
Y(s) &= Y(0)\mathrm{e}^{s},\\
Y(0) &= Y(s)\mathrm{e}^{-s}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= 0 \;\Rightarrow F(s) = F(0) = \phi(X(0),Y(0)) = \phi(0,Y(0)) = g(Y(0)).\\
\phi(x,y) &= F(s) = g(Y(0)) = g\left(Y(s)\mathrm{e}^{-s}\right) = g\left(y\mathrm{e}^{-x}\right) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04B, 15 fev 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Calcule a transformada de Fourier de

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ x+1 & -1 \le x \le 0, \\ 1-x & 0 < x \le 1. \end{cases}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Note que f é par.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos k}{\pi k^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Obtenha a transformada de Fourier da delta de Dirac, $\delta(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = \widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Dado o problema de Sturm-Liouville

$$
\begin{aligned}
y'' + \lambda y &= 0,\\
y(0) &= 0,\\
y(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

obtenha todos os autovalores λ.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Estudamos os sinais de λ:
Caso I: $\lambda = -k^2 < 0$:

$$
\begin{aligned}
y'' - k^2 y &= 0,\\
r^2 - k^2 &= 0,\\
r &= \pm k,\\
y(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx),\\
y(0) &= A = 0,\\
y(1) &= B\,\mathrm{senh}(k) = 0 \Rightarrow B = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $A = 0$, $B = 0$ e $\lambda < 0$ não pode ser autovalor.
Caso II: $\lambda = 0$:

$$
\begin{aligned}
y'' &= 0,\\
y(x) &= Ax + B,\\
y(0) &= B = 0,\\
y(1) &= A = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $A = 0$, $B = 0$, e $\lambda = 0$ não pode ser autovalor.
Caso III: $\lambda = k^2 > 0$:

$$
\begin{aligned}
y'' + k^2 y &= 0,\\
r^2 + k^2 &= 0,\\
r^2 &= -k^2,\\
r &= \pm \mathrm{i},\\
y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
y(0) &= A = 0,\\
y(1) &= B\,\mathrm{sen}(k) = 0;
\end{aligned}
$$

Devemos ter

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(k) &= 0,\\
k_n &= n\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots\\
\lambda_n &= [n\pi]^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Considere a equação diferencial parcial

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= -kx,\\
\phi(0,t) = \phi(L,t) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Obtenha uma solução da forma

$$
\phi(x,t) = \psi(x,t) + u(x),
$$

onde ψ é uma solução da equação da difusão homogênea (sem o termo $-kx$) com $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$, e $u(x)$ uma solução de regime permanente com $u(0) = u(L) = 0$, que não depende de t.
Você pode deixar a solução indicada em termos de integrais envolvendo $u(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A solução $u(x)$, independente do tempo, deve atender a

$$
\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + kx = 0, \qquad u(0) = u(L) = 0.
$$

A solução é

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -\frac{kx^2}{2} + A,\\
u(x) &= -\frac{kx^3}{6} + Ax + B
\end{aligned}
$$

A CC $u(0) = 0$ leva a $B = 0$; a CC $u(L) = 0$ leva a

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{kL^3}{6} + AL,\\
A &= \frac{kL^2}{6},\\
u(x) &= \frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right].
\end{aligned}
$$

Como fica o problema em ψ?

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 [\psi + u]}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial [\psi + u]}{\partial t} + kx &= 0,\\
\underbrace{[\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + kx]}_{=0} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0.
\end{aligned}
$$

Restou, portanto, a equação clássica da difusão em uma dimensão. As condições de contorno e iniciais em ψ são:

$$
\begin{aligned}
0 = \phi(0,t) = \psi(0,t) + u(0) &\qquad \Rightarrow \qquad \psi(0,t) = 0,\\
0 = \phi(L,t) = \psi(0,t) + u(L) &\qquad \Rightarrow \qquad \psi(L,t) = 0,\\
0 = \psi(x,0) + \frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right] &\qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,0) = -\frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right].
\end{aligned}
$$

Este portanto é um problema de valor de contorno e inicial (a equação da onda) perfeitamente bem especificado. Separando as variáveis em ψ:

$$
\begin{aligned}
X''T &= \frac{1}{\alpha^2}XT'\\
\frac{X''}{X} &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \lambda
\end{aligned}
$$

Existe agora um problema de Sturm-Liouville em x clássico, e após a usual discussão de sinais obtém-se

$$
\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.
$$

Continue a solução no verso ⟹

As soluções para ψ, portanto, deverão ser do tipo

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left[-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\psi(x,0) &= -\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right], \\
-\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \Rightarrow \\
-\int_0^L \frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right] \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx &= A_m \frac{L}{2}, \\
A_m &= \frac{2k(-1)^m L^3}{m^3\pi^3}.
\end{aligned}$$

A solução completa portanto é

$$\phi(x,t) = \frac{k}{6}x(L^2-x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k(-1)^n L^3}{n^3\pi^3} \exp\left[-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FA, 27 fev 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Calcule a difusividade numérica introduzida pelo esquema *upwind* explícito

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}=0.$$

Sugestão: note que

$$\begin{aligned}\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}&=\frac{2u_i^n}{2\Delta x}-\frac{u_{i-1}^n}{\Delta x}\\&=\frac{2u_i^n}{2\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{u_{i-1}^n}{\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{u_{i-1}^n}{\Delta x}+\frac{u_{i+1}^n}{2\Delta x}-\frac{u_{i+1}^n}{2\Delta x}\\&=\frac{-u_{i+1}^n+2u_i^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}+\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Reescrevemos o termo advectivo utilizando o resultado da sugestão:

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\left[\frac{-u_{i+1}^n+2u_i^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}+\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right]&=0,\\\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}&=c\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{2\Delta x},\\\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}&=D\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2},\\D&=\frac{c\Delta x}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, o esquema é equivalente a uma discretização numérica da equação de advecção-difusão, com difusividade numérica dada pela penúltima linha acima ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se o produto interno entre duas funções complexas de uma variável real no intervalo fechado $[1,2]$ for definido como

$$\langle f, g\rangle = \int_1^2 f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

com $w(x) = \ln(x)$, calcule $\left\langle x, x^2\right\rangle$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\left\langle x, x^2\right\rangle &= \int_1^2 x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \underbrace{\ln(x)}_{u}\,\underbrace{x^3\,\mathrm{d}x}_{dv} \\
&= \left.\frac{x^4\ln(x)}{4}\right|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{16}{4}\ln 2 - \left.\frac{1}{16}x^4\right|_1^2 \\
&= 4\ln 2 - \frac{1}{16}[16-1] \\
&= 4\ln 2 - 15/16\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Obtenha a série de Fourier complexa de

$$f(x) = x,\ 0 \le x \le 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O problema se resume ao cálculo dos $c_n s$ com $L = 1 - 0 = 1$,

$$c_n = \int_0^1 x \mathrm{e}^{-(2\pi \mathrm{i} n x)}\,\mathrm{d}x.$$

Integrando por partes,

$$c_n = -\frac{1 - 2\pi \mathrm{i} n - 1}{4\pi^2 n^2} = \frac{2\pi \mathrm{i} n}{4\pi^2 n^2} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi n},\ n \ne 0.$$

É evidente que o cálculo para $n = 0$ tem que ser feito separadamente:

$$c_0 = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

O resultado é

$$x = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty, n\ne 0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{2\pi n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Resolva a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

com condições inicial e de contorno

$$\begin{aligned}\phi(x,0) &= \phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right),\\ \phi(0,t) &= 0,\\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(L,t) &= 0.\end{aligned}$$

Você pode usar as fórmulas a seguir (se forem, e as que forem, úteis) sem demonstração.

$$\begin{aligned}\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= \frac{L}{2}\\ \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx &= \frac{L}{2}\\ \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= 0, \qquad n > 1\\ \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) &= \frac{4L(-1)^{n-1}}{3\pi + 4\pi n - 4\pi n^2}\\ \int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) &= \frac{2(2n-1)(-1)^n L}{\pi(2n-3)(2n+1)}\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $\phi = X(x)T(t)$:

$$\begin{aligned}XT' &= a^2 X'' T,\\ \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} &= \frac{X''}{X} = -\lambda.\end{aligned}$$

É evidente que há um problema de Sturm-Liouville nos esperando em X, mas ganharemos um pouco de tempo resolvendo em T primeiro, e raciocinando fisicamente:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -\lambda a^2 T,\\ \frac{dT}{T} &= -\lambda a^2\, \mathrm{d}t\\ \ln \frac{T}{T_0} &= -\lambda a^2 t\\ T(t) &= T_0 \exp(-\lambda a^2 t).\end{aligned}$$

É evidente que não podemos deixar que a solução exploda para $t \to \infty$: $\lambda < 0$ não é aceitável; $\lambda = 0$ também não funciona, porque neste caso a solução permaneceria constante (é evidente que o perfil inicial $\phi(x,0)$ deve se abater, forçado pela condição de contorno esquerda). Segue-se que $\lambda > 0$. Além disto, sem perda de generalidade faremos $T_0 = 1$. O problema de Sturm-Liouville em X é

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \lambda X = 0,$$

$$\begin{aligned}X(0) &= 0,\\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}(L) &= 0.\end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned}X(x) &= A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x),\\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= \sqrt{\lambda}\left[-A\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)\right].\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

A condição de contorno esquerda (em $x = 0$) impõe $A = 0$; a condição de contorno direita (em $x = L$) impõe

$$
\begin{aligned}
\cos(\sqrt{\lambda}L) &= 0,\\
\sqrt{\lambda_n}L &= (2n-1)\frac{\pi}{2},\\
\lambda_n &= \left(\frac{2n-1}{L}\right)^2\frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

As autofunções são

$$
\phi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).
$$

A solução do problema de Sturm-Liouville dá conta das condições de contorno, e agora nós nos voltamos para a condição inicial. A solução geral deve ser da forma

$$
\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)\exp\left(-\frac{(2n-1)^2a^2\pi^2t}{4L^2}\right).
$$

Para atender à condição inicial, devemos ter

$$
\phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_0\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x &=\\
\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x&,\\
\phi_0\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x = B_m\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x & \qquad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_m &= \frac{2}{L}\frac{4\phi_0L(-1)^n}{3\pi+4\pi n-4\pi n^2}\\
&= \frac{8\phi_0(-1)^n}{3\pi+4\pi n-4\pi n^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FB, 03 mar 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] **Um esquema regressivo (*upwind*) de ordem 2.** Expanda em série de Taylor $u(x,t)$ desde x_i até x_{i-1} e x_{i-2} (igualmente espaçados de Δx) **até a ordem 2**, elimine $\partial^2 u/\partial x^2$ e encontre uma aproximação de diferenças finitas para $\partial u/\partial x|_{x_i}$ cujo erro é $O(\Delta x^2)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
u_{i-1} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i \Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i \frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^3),\\
u_{i-2} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 2\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i \frac{(2\Delta x)^2}{2} + O(\Delta x^3).
\end{aligned}
$$

Para eliminar $\partial^2 u/\partial x^2$, multiplicamos a primeira equação acima por 4, e subtraímos:

$$
\begin{aligned}
4u_{i-1} &= 4u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 4\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i 2\Delta x^2 + O(\Delta x^3),\\
u_{i-2} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 2\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i 2\Delta x^2 + O(\Delta x^3),\\
4u_{i-1} - u_{i-2} &= 3u_i - 2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i \Delta x + O(\Delta x^3);\\
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i &= \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= (a_1, a_2, \ldots, a_n),\\
\boldsymbol{y} &= (1, 1, \ldots, 1),\\
\sum_{i=1}^{n} a_i &= 1.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, prove que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{n}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i \times 1)\right|^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right),\\
1 &\leq n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),\\
\sum_{i=1}^{n} a_i^2 &\geq \frac{1}{n} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Ache a série trigonométrica de Fourier (isto é: a série em senos e cossenos) de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right], \\
A_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) \, d\xi, \\
B_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) \, d\xi.
\end{aligned}$$

Prosseguindo no cálculo dos coeficientes,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{2} \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}, \\
A_n &= \int_0^1 \xi \cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) \, d\xi = \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi^2 n^2}, \\
B_n &= \int_0^1 \xi \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) \, d\xi = -\frac{\cos(n\pi)}{\pi n} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Ache a função de Green do problema

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \operatorname{sen}(x), \quad y(0) = 3.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Multiplico por $G(x, \xi)$ e integro de 0 a infinito:

$$\int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\left[\frac{dy}{d\xi} - 2\xi y\right] d\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi) \operatorname{sen}\xi \, d\xi$$

Integrando por partes,

$$G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\infty} + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G\right] d\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi) \operatorname{sen}\xi \, d\xi$$

$$\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$-G(x,0)y(0) + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G\right] d\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi) \operatorname{sen}\xi \, d\xi$$

$$-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G = \delta(\xi - x).$$

$$\frac{dG}{d\xi} + 2\xi G = -\delta(\xi - x).$$

Agora, $G = uv$, e

$$\begin{aligned}
u\left[\frac{dv}{d\xi} + 2\xi v\right] + v\frac{du}{d\xi} &= -\delta(\xi - x)\\
\frac{dv}{d\xi} &= -2\xi v\\
\frac{dv}{2v} &= -2\xi\\
\ln\left(\frac{v}{v_0(x)}\right) &= -\xi^2\\
v &= v_0(x)\exp(-\xi^2)\\
\frac{du}{d\xi} &= -\frac{\exp(\xi^2)}{v_0(x)}\delta(\xi - x)\\
u(\xi) &= u_0(x) - \int_{\eta=0}^{\xi} \frac{\exp(\eta^2)}{v_0(x)}\delta(\eta - x)\, d\eta\\
&= u_0(x) - \frac{H(\xi - x)\exp(x^2)}{v_0(x)} \Rightarrow\\
G(x,\xi) &= \left[u_0(x)v_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2)\\
&= \left[G_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2).
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0 \Rightarrow G_0(x) &= \exp(x^2)\\
G(x,\xi) &= [1 - H(\xi - x)]\exp(x^2 - \xi^2) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹