TEA013 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 03 dez 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Utilizando **obrigatoriamente** o Teorema da Convolução, calcule

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
s^2-3s+2 &= (s-1)(s-2);\\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} &= \mathrm{e}^{t},\\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} &= \mathrm{e}^{2t},\\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} &= \int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{e}^{2\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
&= \mathrm{e}^{t}\int_0^t \mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
&= \mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial e

$$\begin{aligned} \langle,\rangle : \mathbb{V}\times\mathbb{V} &\to \mathbb{C} \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\mapsto \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \end{aligned}$$

é um produto interno, enumere as 5 propriedades que o definem adotadas neste curso.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As propriedades definidoras do produto interno são:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle &= \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle^*, \\ \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\rangle &= \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle, \\ \langle \boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}\rangle &= \alpha\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle, \\ \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle &> 0,\ \ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}, \\ \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle &= 0,\ \ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Calcule a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ +1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{L}}; \\
c_0 &= \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \mathrm{e}^0 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) \, \mathrm{d}x \\
&= 0;
\end{aligned}$$

Se $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n x}{L}} \, \mathrm{d}x, \\
a &= -1, \\
b &= +1, \\
L &= 2, \\
c_n &= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^{0} (-1) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n x}{L}} \, \mathrm{d}x + \int_0^{+1} (+1) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n x}{L}} \, \mathrm{d}x \right] \\
&\vdots \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\pi n} \left[(-1)^n - 1 \right]; \\
f(x) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=+\infty} \frac{\mathrm{i}}{\pi n} \left[(-1)^n - 1 \right] \mathrm{e}^{\pi i n x} \; \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Sabendo que, se $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(m\pi x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n, \end{cases}$$

calcule a série de Fourier **trigonométrica** de

$$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x), \qquad -1 \le x \le +1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right).$$

Mas $f(x)$ é ímpar; logo, $A_n = 0$.

$$\begin{aligned} a &= -1, \\ b &= +1, \\ L &= 2, \\ B_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(\pi x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq 1, \\ 1 & n = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de $f(x)$ é a própria função:

$$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$