TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 09 set 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

**Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.**

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

NÃO ESCREVA NA CARTEIRA.

---

**Nesta prova, é útil saber que**

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{sen}(ax) &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{2a}\left[\mathrm{sen}(ax) - \cos(ax)\right] + C,\\
\int \mathrm{e}^{ax}\cos(ax) &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{2a}\left[\mathrm{sen}(ax) + \cos(ax)\right] + C.
\end{aligned}
$$

---

**1** [25] Encontre a solução de

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x = \mathrm{sen}(3t), \qquad x(0) = 1.
$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
x = uv \;\Rightarrow\; u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 3uv &= \mathrm{sen}(3t);\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 3v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{sen}(3t);\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -3v\\
\frac{dv}{v} &= -3dt\\
\ln|v| &= -3t + k_1\\
|v| &= d_1\mathrm{e}^{-3t}\\
v &= c_1\mathrm{e}^{-3t};\\
c_1\mathrm{e}^{-3t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{sen}(3t);\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{c_1}\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{sen}(3t);\\
u(t) &= \frac{1}{6c_1}\mathrm{e}^{3t}(\mathrm{sen}(3t) - \cos(3t)) + c_2;\\
x(t) = uv &= \left[\frac{1}{6c_1}\mathrm{e}^{3t}(\mathrm{sen}(3t) - \cos(3t)) + c_2\right]c_1\mathrm{e}^{-3t}\\
&= \frac{1}{6}(\mathrm{sen}(3t) - \cos(3t)) + C\mathrm{e}^{-3t};\\
x(0) = 1 \Rightarrow 1 &= -\frac{1}{6} + C;\\
C &= 7/6 \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

**2** [25] Encontre a solução geral de

$$y'' + y = \mathrm{e}^x.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação homogênea associada e sua solução são

$$\begin{aligned} y_h'' + y &= 0,\\ \lambda^2 + 1 &= 0,\\ \lambda &= \pm \mathrm{i},\\ y_h(x) &= A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x) = Ay_1 + By_2. \end{aligned}$$

Procure a solução por variação de parâmetros:

$$\begin{aligned} y &= Ay_1 + By_2,\\ y' &= \underbrace{A'y_1 + B'y_2}_{=0} + Ay_1' + By_2',\\ y'' &= A'y_1' + B'y_2' + Ay_1'' + By_2''. \end{aligned}$$

Substitua:

$$\begin{aligned} A'y_1' + B'y_2' + Ay_1'' + By_2'' + Ay_1 + By_2 &= \mathrm{e}^x,\\ A\underbrace{[y_1'' + y_1]}_{=0} + B\underbrace{[y_2'' + y_2]}_{=0} + A'y_1' + B'y_2' &= \mathrm{e}^x,\\ -A'\operatorname{sen}(x) + B'\cos(x) &= \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

As duas equações que devemos resolver são:

$$\begin{aligned} A'\cos(x) + B'\operatorname{sen}(x) &= 0,\\ -A'\operatorname{sen}(x) + B'\cos(x) &= \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Com alguma inspiração, para $A(x)$:

$$\begin{aligned} A'\cos^2(x) + B'\operatorname{sen}(x)\cos(x) &= 0,\\ -A'\operatorname{sen}^2(x) + B'\cos(x)\operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^x,\\ A'\left[\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)\right] &= -\operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^x,\\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -\operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^x,\\ A(x) &= -\frac{\mathrm{e}^x}{2}[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] + C_A; \end{aligned}$$

para $B(x)$:

$$\begin{aligned} A'\cos(x)\operatorname{sen}(x) + B'\operatorname{sen}^2(x) &= 0,\\ -A'\operatorname{sen}(x)\cos(x) + B'\cos^2(x) &= \cos(x)\mathrm{e}^x,\\ B'[\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)] &= \cos(x)\mathrm{e}^x,\\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= \cos(x)\mathrm{e}^x,\\ B(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{2}[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)] + C_B; \end{aligned}$$

A solução geral terá a forma

$$\begin{aligned} y(x) &= \left\{-\frac{\mathrm{e}^x}{2}[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] + C_A\right\}\cos(x) + \left\{\frac{\mathrm{e}^x}{2}[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)] + C_B\right\}\operatorname{sen}(x)\\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{2}[-\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x)] + \frac{\mathrm{e}^x}{2}[\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)] + C_A\cos(x) + C_B\operatorname{sen}(x)\\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{2} + C_A\cos(x) + C_B\operatorname{sen}(x) \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

**3** [25] Obtenha as 3 raízes de

$$z^3 = -1.$$

onde $z \in \mathbb{C}$.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
z &= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\\
-1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\pi+2k\pi]},\\
r^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\pi+2k\pi]},\\
r &= 1,\\
3\mathrm{i}\theta &= \pi + 2k\pi,\\
\theta &= \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \;:\\
z_1 &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};\\
z_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1,\\
z_3 &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

**4** [25] Seja $\mathscr{L}_C$ o círculo com raio 1 e centro na origem do plano complexo, ou seja: o conjunto dos números complexos $z$ tais que $|z| = 1$. Calcule a integral

$$I = \oint_{\mathscr{L}_C} \frac{1}{z(z-2)}\,\mathrm{d}z.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Pelo Teorema dos Resíduos,

$$\oint_{\mathscr{L}_C} \frac{1}{z(z-2)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}c_{-1},$$

onde $c_{-1}$ é o resíduo em torno de $z = 0$, que é o único polo dentro do contorno $\mathscr{L}_C$. Mas

$$c_{-1} = \frac{1}{-2} \Rightarrow$$
$$I = 2\pi\mathrm{i} \times -\frac{1}{2} = -\pi\mathrm{i} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹