TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03A, 12 ago 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

NÃO ESCREVA NA CARTEIRA.

---

1 [25] O programa a seguir,

```
#!/usr/bin/python3
from math import exp
def ff(x):
    return (x*t + x/(1.0 + exp(x)))
def trapezio(n,a,b,f):
   h = (b-a)/n
   Se = f(a) + f(b)
   Si = 0.0
   for k in range(1,n):
      xk = a + k*h
      Si += f(xk)
   return (Se + 2*Si)*h/2
nt = 100
dt = 1.0/nt
nx = 100000
Fold = 0.0
Fnew = 0.0
told = 0.0
t = 0.0
fou = open('intxt.out','wt')
fou.write('%8.4f %8.4f\n' % (t,Fnew))
for it in range(nt):
   Fold = Fnew
   told = t
   t = told + dt
   Fnew = trapezio(nx,0,t,ff)
   fou.write('%8.4f %8.4f\n' % (t,Fnew))
fou.close();
```

calcula e imprime uma tabela de valores $(t, F(t))$. Escreva a expressão analítica para $F(t)$, em termos de uma integral.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$F(t) = \int_{x=0}^{t} \left[xt + \frac{x}{1+e^x} \right] \, dx \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \left[xt + \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\right]\,\mathrm{d}x.$$

Sugestão: Use a regra de Leibniz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x = f(b,t)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - f(a,t)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
a(t) &= 0,\\
b(t) &= t,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \left[xt + \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\right]\,\mathrm{d}t &= \left[t^2 + \frac{t}{1+\mathrm{e}^t}\right] \times 1 - 0 + \int_0^t x\,\mathrm{d}x\\
&= t^2 + \frac{t}{1+\mathrm{e}^t} + \frac{t^2}{2}\\
&= \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{1+\mathrm{e}^t} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Se $f(x,y) = \cosh(x+y)$, calcule a derivada da função

$$F(s) = f(x(s), y(s))$$

ao longo da curva

$$\begin{aligned} x &= s, \\ y &= s^2, \end{aligned}$$

em $s = 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
F(s) &= f(x(s), y(s)); \\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}; \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \operatorname{senh}(x+y), \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \operatorname{senh}(x+y), \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= 1, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= 2s, \\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \operatorname{senh}(x+y)\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right]; \\
\frac{\mathrm{d}F(1)}{\mathrm{d}s} &= \operatorname{senh}(x+y)\,[1+2s]\Big|_{s=1} \\
&= 3\operatorname{senh}(2) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Se

$$\boldsymbol{v} = (x^2 + y^2, y^2 + z^2, z^2 + x^2),$$

calcule $\nabla \times \boldsymbol{v}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y^2 + z^2 & z^2 + x^2 \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial z}\right]\boldsymbol{i} - \left[\frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial z}\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k} \\
&= \left[-\frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial z}\right]\boldsymbol{i} - \left[\frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial x}\right]\boldsymbol{j} + \left[-\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k} \\
&= -2z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} - 2y\boldsymbol{k} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹