

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01A, 14 Fev 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO

Assinatura: _____

1 [25] Qual é a saída do programa a seguir?

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import array
a = array([0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10])
b = (a[0:9] + a[1:10] + a[2:11])/3
print(a)
print(b)
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
[ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]
[1 2 3 4 5 6 7 8 9]
```

2 [25] Considere o seguinte esquema de diferenças finitas para a equação da onda cinemática:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{c}{2\Delta x} (u_i^n - u_{i-2}^n),$$

onde $c > 0$ é a celeridade da onda.

- a) [05] Escreva u_i^{n+1} em função de u_i^n , u_{i-1}^n , u_{i-2}^n e $Co = c\Delta t/\Delta x$.
- b) [20] Faça uma análise de estabilidade de von Neumann: quais são os valores permitidos para Co ?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n &= -\frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_i^n - u_{i-2}^n), \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{Co}{2} (u_i^n - u_{i-2}^n), \\ u_i^{n+1} &= \left(1 - \frac{Co}{2}\right) u_i^n + \frac{Co}{2} u_{i-2}^n. \end{aligned}$$

b) A análise de estabilidade de von Neumann se inicia pela equação de evolução para cada harmônico do erro de arredondamento:

$$\begin{aligned} \xi_l e^{a(t_n+\Delta t)} e^{ik_l i \Delta x} &= \left(1 - \frac{Co}{2}\right) \xi_l e^{at_n} e^{ik_l i \Delta x} + \frac{Co}{2} \xi_l e^{at_n} e^{ik_l (i-2)\Delta x}; \\ e^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{Co}{2}\right) + \frac{Co}{2} e^{-2ik_l \Delta x}; \\ \theta &\equiv 2k_l \Delta x; \\ e^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{Co}{2}\right) + \frac{Co}{2} e^{-i\theta}; \\ e^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{Co}{2}\right) + \frac{Co}{2} (\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)); \\ e^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{Co}{2}\right) + \frac{Co}{2} \cos(\theta) - i \frac{Co}{2} \operatorname{sen}(\theta); \\ e^{a\Delta t} &= 1 + \frac{Co}{2} (\cos(\theta) - 1) - i \frac{Co}{2} \operatorname{sen}(\theta); \end{aligned}$$

Agora impomos

$$\begin{aligned} |e^{a\Delta t}|^2 &\leq 1; \\ 1 + Co(\cos(\theta) - 1) + \frac{Co^2}{4} (\cos(\theta) - 1)^2 + \frac{Co^2}{4} \operatorname{sen}^2(\theta) &\leq 1 \\ 1 + Co(\cos(\theta) - 1) + \frac{Co^2}{4} (\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta) + 1) + \frac{Co^2}{4} \operatorname{sen}^2(\theta) &\leq 1 \\ Co(\cos(\theta) - 1) + \frac{Co^2}{4} (\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) + \frac{Co^2}{4} (-2\cos(\theta) + 1) &\leq 0 \\ Co(\cos(\theta) - 1) + \frac{Co^2}{4} + \frac{Co^2}{4} (-2\cos(\theta) + 1) &\leq 0 \\ Co(\cos(\theta) - 1) + \frac{Co^2}{4} (-2\cos(\theta) + 2) &\leq 0 \\ Co(\cos(\theta) - 1) + \frac{Co^2}{2} (-\cos(\theta) + 1) &\leq 0 \\ Co(1 - \cos(\theta)) \left[-1 + \frac{Co}{2}\right] &\leq 0; \Rightarrow \\ \frac{Co}{2} &\leq 1, \\ Co &\leq 2 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [25] Um esquema implícito *upwind* para a equação da onda cinemática é

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x},$$

onde c é a celeridade da onda. Como é o esquema de Crank-Nicholson equivalente?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{c}{2} \left[\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right] \blacksquare$$

4 [25] Obtenha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-|x|} \cos(x) dx,$$

onde $\delta(x)$ é a delta de Dirac.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x) dx = f(0);$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-|x|} \cos(x) dx = e^{-|0|} \cos(0) = 1 \blacksquare$$

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO

Assinatura: _____

1 [25] Calcule a difusividade numérica introduzida pelo esquema *upwind* explícito

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

Sugestão: note que

$$\begin{aligned} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} &= \frac{2u_i^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i-1}^n}{\Delta x} \\ &= \frac{2u_i^n}{2\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{u_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{u_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i+1}^n}{2\Delta x} \\ &= \frac{-u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Reescrevemos o termo advectivo utilizando o resultado da sugestão:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \left[\frac{-u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] &= 0, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} &= c \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x}, \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} &= D \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \\ D &= \frac{c\Delta x}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o esquema é equivalente a uma discretização numérica da equação de advecção-difusão, com difusividade numérica dada pela última linha acima ■

2 [25] Considere o seguinte esquema de diferenças finitas implícito para a equação da onda cinemática:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x} (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) = 0,$$

onde $c > 0$ é a celeridade da onda. Se as condições de contorno são $u_0 = 0$, $u_{N_x} = 0$, a matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 + Co & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -Co & 1 + Co & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -Co & 1 + Co & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -Co & 1 + Co \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N_x-2}^{n+1} \\ u_{N_x-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N_x-2}^n \\ u_{N_x-1}^n \end{bmatrix},$$

onde $Co = c\Delta t/\Delta x$ é o número de Courant. Esse é um sistema que ainda pode ser resolvido pelo algoritmo de Thomas, utilizando por exemplo a rotina `tridag` apresentada em aula. Após a alocação de 3 *arrays* A, B e C, via

A = zeros(nx-1, float)

B = zeros(nx-1, float)

C = zeros(nx-1, float)

e supondo que o número de Courant já está calculado na variável `Cou`, escreva 3 linhas de Python que preencham os valores de A, B e C para uso subsequente na rotina `tridag`. Atenção para os índices dos *slices* dos *arrays*.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A[1:nx-1] = -Cou

B[0:nx-1] = 1.0 + Cou

C[0:nx-2] = 0.0 ■

3 [25] Se $x, y \in \mathbb{C}^n$, verifique se

$$\langle x, y \rangle \equiv \sum_{k=1}^n \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right]$$

é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \langle y, x \rangle &= \sum_{k=1}^n \left[y_k^* x_k \frac{k}{n} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[(x_k^* y_k)^* \frac{k}{n} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right]^* \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right] \right\}^* \\ &= \langle x, y \rangle^* \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, y+z \rangle &= \sum_{k=1}^n \left[x_k^* (y_k + z_k) \frac{k}{n} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right] + \sum_{k=1}^n \left[x_k^* z_k \frac{k}{n} \right] \\ &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, \alpha y \rangle &= \sum_{k=1}^n \left[x_k^* \alpha y_k \frac{k}{n} \right] \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right] \\ &= \alpha \langle x, y \rangle \checkmark \end{aligned}$$

$x \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \sum_{k=1}^n \left[x_k^* x_k \frac{k}{n} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \frac{k}{n} > 0 \checkmark \end{aligned}$$

$x = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \sum_{k=1}^n \left[x_k^* x_k \frac{k}{n} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n 0 \times \frac{k}{n} = 0 \checkmark \end{aligned}$$

E portanto o produto interno é legítimo ■

Continue a solução no verso \Rightarrow

4 [25] Dados os vetores

$$\mathbf{x} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

e

$$\mathbf{y} = (1, 1, \dots, 1),$$

utilize a identidade

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^n a_i a_j,$$

o produto interno canônico do \mathbb{R}^n , e a desigualdade de Schwarz para encontrar o valor de α em

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{ij}} \leq \alpha.$$

Sugestão: Note que neste caso devemos fazer

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{i}}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A desigualdade de Schwarz é

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

Agora,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}};$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i};$$

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n 1^2 = n.$$

Substituindo as 3 expressões acima na desigualdade de Schwarz encontramos

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}\right]^2 &\leq \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right] n; \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^n \frac{1}{\sqrt{ij}} &\leq n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}; \\ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^n \frac{1}{\sqrt{ij}} &\leq (n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}; \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^n \frac{1}{\sqrt{ij}} &\leq \frac{(n-1)}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{(n-1)}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \blacksquare$$

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO.

1 [25] Seja $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ uma base ortonormal de um espaço vetorial \mathbb{V} com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$,

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}_k,$$
$$\mathbf{b} = \sum_{l=1}^n b_l \mathbf{e}_l.$$

Calcule $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, justificando todas as passagens.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}_k, \sum_{l=1}^n b_l \mathbf{e}_l \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \left\langle \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}_k, b_l \mathbf{e}_l \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \langle a_k \mathbf{e}_k, b_l \mathbf{e}_l \rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_k^* b_l \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_k^* b_l \delta_{kl} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^* b_k \blacksquare \end{aligned}$$

2 [25] Obtenha a série de Fourier **complexa** de

$$\phi(x) = \cos(\pi x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

ou seja: obtenha os c_n s em

$$\cos(\pi x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(\pi i n x).$$

Sugestão: Você pode usar os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \cos(n\pi x) \cos(\pi x) dx &= 0, & n \neq \pm 1, \\ \int_{-1}^{+1} \sin(n\pi x) \cos(\pi x) dx &= 0, & \forall n, \\ \int_{-1}^{+1} \cos^2(\pi x) dx &= 1. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} a &= -1, \\ b &= +1, \\ L &= 2, \\ c_n &= \frac{1}{L} \int_a^b e^{-\frac{2n\pi i x}{L}} \phi(x) dx, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-n\pi i x} \cos(\pi x) dx, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \cos(n\pi x) \cos(\pi x) dx - \frac{i}{2} \int_{-1}^{+1} \sin(n\pi x) \cos(\pi x) dx. \end{aligned}$$

Para $n \neq \pm 1$, o enunciado nos informa que $c_n = 0$. Para $n = 1$, o enunciado também nos dá diretamente as integrais de interesse. Para $n = -1$,

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \cos(-\pi x) \cos(\pi x) dx - \frac{i}{2} \int_{-1}^{+1} \sin(-\pi x) \cos(\pi x) dx, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \cos(\pi x) \cos(\pi x) dx + \frac{i}{2} \int_{-1}^{+1} \sin(\pi x) \cos(\pi x) dx, \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$c_{\pm 1} = \frac{1}{2},$$

e ficamos reduzidos ao resultado trivial

$$\begin{aligned} \cos(\pi x) &= c_{-1} e^{-i\pi x} + c_{+1} e^{i\pi x} \\ &= \frac{1}{2} [e^{-i\pi x} + e^{i\pi x}] \\ &\equiv \cos(\pi x) \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso \implies

3 [25] Obtenha a série de Fourier trigonométrica da extensão ímpar de

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Sabemos que todos os coeficientes dos cossenos (A_n s) são nulos. Os coeficientes dos senos são

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f_I(x) \operatorname{sen} \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{+1} f_I(x) \operatorname{sen} \left(\frac{2n\pi x}{2} \right) dx \\ &= 2 \int_0^{+1} f(x) \operatorname{sen} (n\pi x) dx \\ &= 2 \int_0^{+1} x \operatorname{sen} (n\pi x) dx \\ &= 2 \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}, \\ f_I(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \operatorname{sen} (n\pi x) \blacksquare \end{aligned}$$

4 [25] Dada a forma trigonométrica da série de Fourier de uma função,

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),$$

onde f é definida em $[a, b]$ e $b - a = L$, obtenha a igualdade de Parseval correspondente. Lembre-se de que os coeficientes da série de Fourier complexa são

$$c_n = \frac{1}{2} [A_n - iB_n],$$

e que a desigualdade de Parseval para os coeficientes da série complexa é

$$\frac{1}{L} \int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Ver a seção 14.7 do livro-texto:

$$\frac{1}{L} \int_a^b |f(x)|^2 dx = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^2 + B_n^2] \quad \blacksquare$$

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [25] Seja \mathbb{V} um espaço vetorial de funções **reais** em $[-\pi/2, +\pi/2]$, e seja o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(x)g(x)w(x) dx,$$

com

$$w(x) = \cos(x).$$

As funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = 1$ são ortogonais **sob esse produto interno**? Justifique matematicamente sua resposta.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \text{sen}(x) \times 1 \times \cos(x) dx \\ &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \underbrace{\text{sen}(x)}_{\text{ímpar}} \underbrace{\cos(x)}_{\text{par}} dx = 0, \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ímpar}} \end{aligned}$$

e as funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = 1$ são, de fato, ortogonais ■

2 [25] Seja \mathbb{V} o espaço das funções **reais** quadrado-integráveis em $[0, \pi]$ com o produto interno canônico

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^\pi f(x)g(x) \, dx.$$

Faça $f(x) = 1$, $g(x) = \sqrt{\text{sen}(x)}$, e use obrigatoriamente a desigualdade de Schwarz para encontrar α tal que

$$\int_0^\pi \sqrt{\text{sen}(x)} \, dx \leq \alpha.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle|^2 &\leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle, \\ \left| \int_0^\pi 1 \times \sqrt{\text{sen}(x)} \, dx \right|^2 &\leq \left[\int_0^\pi 1^2 \, dx \right] \left[\int_0^\pi (\sqrt{\text{sen}(x)})^2 \, dx \right] \\ &= \pi \int_0^\pi \text{sen}(x) \, dx = 2\pi; \\ \int_0^\pi \sqrt{\text{sen}(x)} \, dx &\leq \sqrt{2\pi} = \alpha \blacksquare \end{aligned}$$

3 [25] Obtenha os coeficientes c_n da série de Fourier **complexa** de $f(x) = e^{-|x|}$, $-1 \leq x \leq +1$. **Sugestão:** preste bastante atenção às integrais de funções pares e ímpares envolvidas, e às simplificações possíveis.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} a &= -1, \\ b &= +1, \\ L &= 2, \\ c_n &= \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-|x|} e^{-\frac{2\pi i n x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-|x|} e^{-\pi i n x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-|x|} [\cos(\pi n x) - i \operatorname{sen}(\pi n x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-|x|} [\cos(\pi n x) - i \operatorname{sen}(\pi n x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \underbrace{e^{-|x|}}_{\text{par}} \underbrace{\cos(\pi n x)}_{\text{par}} dx - \frac{i}{2} \int_{-1}^{+1} \underbrace{e^{-|x|}}_{\text{par}} \underbrace{\operatorname{sen}(\pi n x)}_{\text{ímpar}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \underbrace{e^{-|x|}}_{\text{par}} \underbrace{\cos(\pi n x)}_{\text{par}} dx \\ &= \int_0^{+1} e^{-x} \cos(\pi n x) dx \\ &= \frac{1}{\pi^2 n^2 + 1} - \frac{(-1)^n}{e(\pi^2 n^2 + 1)} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso \Rightarrow

4 [25] Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+(x-1)^2} dx = \pi e^{-|k|} \cos(k),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(kx)}{1+(x-1)^2} dx = \pi e^{-|k|} \text{sen}(k),$$

obtenha a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x-1)^2} e^{-ikx} dx \\ \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x-1)^2} [\cos(kx) - i \text{sen}(kx)] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [\pi e^{-|k|} \cos(k) - i \pi e^{-|k|} \text{sen}(k)] \\ &= \frac{e^{-|k|}}{2} [\cos(k) - i \text{sen}(k)] \\ &= \frac{e^{-|k|}}{2} e^{-ik} \\ &= \frac{e^{-(|k|+ik)}}{2} \blacksquare\end{aligned}$$

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [25] Generalize a identidade de Parseval. Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções complexas de uma variável real x no intervalo $[a, b]$, e se

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{\frac{2m\pi ix}{L}},$$
$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{\frac{2n\pi ix}{L}},$$

obtenha

$$\frac{1}{L} \int_a^b f^*(x)g(x) dx$$

como uma soma sobre os c_n s e d_n s. **Sugestão:** escreva o produto $f^*(x)g(x)$ em termos das séries de Fourier acima, e integre de a até b . Observe que

$$\int_a^b e^{-\frac{2m\pi ix}{L}} e^{\frac{2n\pi ix}{L}} dx = \delta_{mn}L.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} f^*(x)g(x) &= \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^* e^{-\frac{2m\pi ix}{L}} \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{\frac{2n\pi ix}{L}} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m^* d_n e^{-\frac{2m\pi ix}{L}} e^{\frac{2n\pi ix}{L}}; \\ \int_a^b f^*(x)g(x) dx &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m^* d_n \int_a^b e^{-\frac{2m\pi ix}{L}} e^{\frac{2n\pi ix}{L}} dx \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m^* d_n \delta_{mn}L \Rightarrow \\ \frac{1}{L} \int_a^b f^*(x)g(x) dx &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* d_n \blacksquare \end{aligned}$$

2 [25] Usando obrigatoriamente funções de Green, resolva

$$\frac{dx}{dt} + tx = f(t),$$

$$x(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$G(t, \tau) \frac{dx}{d\tau} + \tau G(t, \tau)x(\tau) = G(t, \tau)f(\tau),$$

$$\int_{\tau=0}^{\infty} G(t, \tau) \frac{dx}{d\tau} d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} \tau G(t, \tau)x(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t, \tau)f(\tau) d\tau$$

$$G(t, \tau)x(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau) \frac{dG}{d\tau} d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} \tau G(t, \tau)x(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t, \tau)f(\tau) d\tau,$$

Faça $G(t, \infty) = 0$;

$$\int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau) \left[-\frac{dG}{d\tau} + \tau G \right] d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t, \tau)f(\tau) d\tau;$$

$$-\frac{dG}{d\tau} + \tau G = \delta(\tau - t) \Rightarrow$$

$$x(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t, \tau)f(\tau) d\tau.$$

Agora resolvemos a EDO para $G(t, \tau)$:

$$-\frac{dG}{d\tau} + \tau G = \delta(\tau - t),$$

$$G(t, \tau) = u(t, \tau)v(t, \tau),$$

$$-u \frac{dv}{d\tau} - v \frac{du}{d\tau} + \tau uv = \delta(\tau - t),$$

$$u \left[-\frac{dv}{d\tau} + \tau v \right] - v \frac{du}{d\tau} = \delta(\tau - t),$$

$$-\frac{dv}{d\tau} + \tau v = 0,$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \tau v,$$

$$\frac{dv}{v} = \tau d\tau,$$

$$\int_{v(t,0)}^{v(t,\tau)} \frac{dv}{v} = \int_{\xi=0}^{\tau} \xi d\xi,$$

$$\ln \frac{v(t, \tau)}{v(t, 0)} = \frac{\tau^2}{2},$$

$$v(t, \tau) = v(t, 0)e^{\frac{\tau^2}{2}};$$

$$-v(t, 0)e^{\frac{\tau^2}{2}} \frac{du}{d\tau} = \delta(\tau - t),$$

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{v(t, 0)} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \delta(\tau - t),$$

$$\int_{u(t,0)}^{u(t,\tau)} du = -\frac{1}{v(t, 0)} \int_{\xi=0}^{\tau} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \delta(\xi - t) d\xi,$$

$$u(t, \tau) - u(t, 0) = -\frac{1}{v(t, 0)} e^{-\frac{\tau^2}{2}} H(\tau - t),$$

$$u(t, \tau) = u(t, 0) - \frac{1}{v(t, 0)} e^{-\frac{\tau^2}{2}} H(\tau - t).$$

Substituímos agora na função de Green:

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= u(t, \tau)v(t, \tau) \\ &= \left[u(t, 0) - \frac{1}{v(t, 0)} e^{-\frac{t^2}{2}} H(\tau - t) \right] v(t, 0) e^{\frac{\tau^2}{2}} \\ &= G(t, 0) e^{\tau^2/2} - H(\tau - t) e^{(\tau^2 - t^2)/2} \\ &= \left[G(t, 0) - H(\tau - t) e^{-t^2/2} \right] e^{\tau^2/2}. \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} G(t, \tau) &= 0 \Rightarrow \\ G(t, 0) &= e^{-t^2/2}, \\ G(t, \tau) &= \left[e^{-t^2/2} - H(\tau - t) e^{-t^2/2} \right] e^{\tau^2/2} \\ &= [1 - H(\tau - t)] e^{(\tau^2 - t^2)/2}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{\tau=0}^{\infty} [1 - H(\tau - t)] e^{(\tau^2 - t^2)/2} f(\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t e^{(\tau^2 - t^2)/2} f(\tau) d\tau \blacksquare \end{aligned}$$

3

a) [12.5] Calcule

$$\widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx.$$

Se $\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$, onde

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

mostre que

$$\widehat{H}(k) = \frac{1}{2\pi ik}.$$

b) [12.5] Prove que

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-ika} \widehat{f}(k) \Leftrightarrow f(x-a) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ik(x-a)} dk.$$

Sugestão: faça $\xi = x - a$ e substitua na definição de $\mathcal{F}\{f(x-a)\}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^0 = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx},$$

$$\widehat{\delta}(k) = ik\widehat{H}(k),$$

$$\widehat{H}(k) = \frac{1}{2\pi ik}.$$

b)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x-a)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik(\xi+a)} d\xi \\ &= e^{-ika} \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \\ &= e^{-ika} \widehat{f}(k) \blacksquare \end{aligned}$$

4 [25] Desenhe a função $H(x + L) - H(x - L)$, onde $H(x)$ é a função de Heaviside. Utilizando obrigatoriamente a transformada de Fourier, e os resultados da questão **3** (mesmo que você não tenha conseguido fazê-la), resolva a EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} &= 0, \\ u &= \text{constante}, \\ c(x, 0) &= c_0 [H(x + L) - H(x - L)], \\ c_0 &= \text{constante}. \end{aligned}$$

Sugestão: não use $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$; deixe todas as exponenciais complexas intactas e interprete, utilizando os resultados da questão **3**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{c}}{dt} + uik\widehat{c} &= 0, \\ \frac{d\widehat{c}}{\widehat{c}} &= -uikdt, \\ \ln \frac{\widehat{c}(k, t)}{\widehat{c}(k, 0)} &= -uikt, \\ \widehat{c}(k, t) &= \widehat{c}(k, 0)e^{-ikut}. \end{aligned}$$

Agora encontramos $\widehat{c}(k, 0)$:

$$\begin{aligned} \widehat{c}(k, 0) &= \mathcal{F}\{c(x, 0)\} \\ &= \mathcal{F}\{c_0 [H(x + L) - H(x - L)]\} \\ &= \frac{c_0}{2\pi ik} [e^{ikL} - e^{-ikL}]. \end{aligned}$$

Voltando ao problema original,

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{c}(k, t)e^{+ikx} dk \\ &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_0}{2\pi ik} [e^{ikL} - e^{-ikL}] e^{-ikut} e^{+ikx} dk \\ &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_0}{2\pi ik} e^{ikL} e^{-ikut} e^{+ikx} dk - \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_0}{2\pi ik} e^{-ikL} e^{-ikut} e^{+ikx} dk \\ &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_0}{2\pi ik} e^{ik(x-ut+L)} dk - \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_0}{2\pi ik} e^{-ik(x-ut-L)} dk \\ &= c_0 H(x - ut + L) - c_0 H(x - ut - L) \\ &= c_0 [H(x - ut + L) - H(x - ut - L)] \blacksquare \end{aligned}$$

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [25] Se

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

obtenha a sua transformada de Fourier $\widehat{f}(k)$, sabendo que

$$\int_0^a \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \cos(kx) dx = \frac{2 \operatorname{sen}(ak) - 2ak \cos(ak)}{a^2 k^3}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] [\cos(kx) - i \operatorname{sen}(kx)] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+a} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \cos(kx) dx \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}(ak) - 2ak \cos(ak)}{\pi a^2 k^3} \blacksquare \end{aligned}$$

2 [25] Usando obrigatoriamente funções de Green, resolva

$$\frac{dx}{dt} + tx = f(t),$$

$$x(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$G(t, \tau) \frac{dx}{d\tau} + \tau G(t, \tau)x(\tau) = G(t, \tau)f(\tau),$$

$$\int_{\tau=0}^{\infty} G(t, \tau) \frac{dx}{d\tau} d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} \tau G(t, \tau)x(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t, \tau)f(\tau) d\tau$$

$$G(t, \tau)x(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau) \frac{dG}{d\tau} d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} \tau G(t, \tau)x(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t, \tau)f(\tau) d\tau,$$

Faça $G(t, \infty) = 0$;

$$\int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau) \left[-\frac{dG}{d\tau} + \tau G \right] d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t, \tau)f(\tau) d\tau;$$

$$-\frac{dG}{d\tau} + \tau G = \delta(\tau - t) \Rightarrow$$

$$x(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t, \tau)f(\tau) d\tau.$$

Agora resolvemos a EDO para $G(t, \tau)$:

$$-\frac{dG}{d\tau} + \tau G = \delta(\tau - t),$$

$$G(t, \tau) = u(t, \tau)v(t, \tau),$$

$$-u \frac{dv}{d\tau} - v \frac{du}{d\tau} + \tau uv = \delta(\tau - t),$$

$$u \left[-\frac{dv}{d\tau} + \tau v \right] - v \frac{du}{d\tau} = \delta(\tau - t),$$

$$-\frac{dv}{d\tau} + \tau v = 0,$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \tau v,$$

$$\frac{dv}{v} = \tau d\tau,$$

$$\int_{v(t,0)}^{v(t,\tau)} \frac{dv}{v} = \int_{\xi=0}^{\tau} \xi d\xi,$$

$$\ln \frac{v(t, \tau)}{v(t, 0)} = \frac{\tau^2}{2},$$

$$v(t, \tau) = v(t, 0)e^{\frac{\tau^2}{2}};$$

$$-v(t, 0)e^{\frac{\tau^2}{2}} \frac{du}{d\tau} = \delta(\tau - t),$$

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{v(t, 0)} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \delta(\tau - t),$$

$$\int_{u(t,0)}^{u(t,\tau)} du = -\frac{1}{v(t, 0)} \int_{\xi=0}^{\tau} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \delta(\xi - t) d\xi,$$

$$u(t, \tau) - u(t, 0) = -\frac{1}{v(t, 0)} e^{-\frac{\tau^2}{2}} H(\tau - t),$$

$$u(t, \tau) = u(t, 0) - \frac{1}{v(t, 0)} e^{-\frac{\tau^2}{2}} H(\tau - t).$$

Substituímos agora na função de Green:

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= u(t, \tau)v(t, \tau) \\ &= \left[u(t, 0) - \frac{1}{v(t, 0)} e^{-\frac{t^2}{2}} H(\tau - t) \right] v(t, 0) e^{\frac{\tau^2}{2}} \\ &= G(t, 0) e^{\tau^2/2} - H(\tau - t) e^{(\tau^2 - t^2)/2} \\ &= \left[G(t, 0) - H(\tau - t) e^{-t^2/2} \right] e^{\tau^2/2}. \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} G(t, \tau) &= 0 \Rightarrow \\ G(t, 0) &= e^{-t^2/2}, \\ G(t, \tau) &= \left[e^{-t^2/2} - H(\tau - t) e^{-t^2/2} \right] e^{\tau^2/2} \\ &= [1 - H(\tau - t)] e^{(\tau^2 - t^2)/2}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{\tau=0}^{\infty} [1 - H(\tau - t)] e^{(\tau^2 - t^2)/2} f(\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t e^{(\tau^2 - t^2)/2} f(\tau) d\tau \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= x, \\g(x) &= e^{-|x|},\end{aligned}$$

Calcule a integral de convolução (no sentido de Fourier) $[f * g](x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}[f * g](x) &= \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(x - \xi)g(\xi) d\xi \\&= \int_{\xi=-\infty}^0 (x - \xi)e^{-|\xi|} d\xi + \int_{\xi=0}^{+\infty} (x - \xi)e^{-|\xi|} d\xi \\&= \int_{\xi=-\infty}^0 (x - \xi)e^{\xi} d\xi + \int_{\xi=0}^{+\infty} (x - \xi)e^{-\xi} d\xi \\&= (x + 1) + (x - 1) = 2x \blacksquare\end{aligned}$$

4 [25] Dada a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + E \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4},$$

onde D e E são constantes reais e $\phi = \phi(x, t)$, obtenha a equação diferencial ordinária em $\widehat{\phi}(k, t)$, onde

$$\widehat{\phi}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t) e^{-ikx} dx$$

é a transformada de Fourier de $\phi(x, t)$ (em relação a x). **Não tente resolver a equação resultante.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{d\widehat{\phi}}{dt} = D(ik)^2 \widehat{\phi} + E(ik)^4 \widehat{\phi},$$

$$\frac{d\widehat{\phi}}{dt} = -Dk^2 \widehat{\phi} + Ek^4 \widehat{\phi},$$

$$\frac{d\widehat{\phi}}{dt} = [-Dk^2 + Ek^4] \widehat{\phi} \blacksquare$$

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ALUNO GENÉRICO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ALUNO GENÉRICO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: FELIPE BORTOLLETTO CIVITATE

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: CAMILA RIBEIRO SCHNEIDER

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: VITOR KURTEN FEITOSA

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABRIELA DA SILVEIRA MULLER

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: MIRELLY LACERDA PINHEIRO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ROBERTA MARIA TELLES KULIK

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ALEXANDRE SOKOLOSKI DE MACEDO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: LISANDRA GONÇALVES DIAS

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: HIAN DA SILVA PINTO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: PAULO VINICIUS ALVES

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GRENDA IZABELI MENEZES DA SILVA

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: EMILI BATISTA DA SILVA

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: BARBARA SANCHES ANTUNES GOELDNER

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ALESSANDRO ENOS TULIO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: BRENDA CAMILA FERREIRA

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GIOVANA SABBAG PIURKOSKI

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: RAFAELA COSTA MIRABILE

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ARIANE APARECIDA CRUZ DA SILVA

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: KAROLLYN LARISSA DE QUADROS

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [15] Classifique a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$A\phi_{xx} + 2B\phi_{xt} + C\phi_{tt} = F,$$

$$A = 1,$$

$$B = 1,$$

$$C = 1,$$

$$\Delta = B^2 - AC = 0.$$

Portanto, a equação é parabólica ■

2 [35] Resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(0, t) &= \phi_0, \\ \phi(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x, t) = u(x, t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t}; \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \phi_0/L; \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Substituindo na EDP, encontramos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Substituindo as condições iniciais e de contorno, encontramos:

$$\begin{aligned}\phi(x, 0) &= u(x, 0) + \phi_0(1 - x/L) = 0; \\ u(x, 0) &= -\phi_0(1 - x/L).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(0, t) &= u(0, t) + \phi_0 = \phi_0; \\ u(0, t) &= 0; \\ \phi(L, t) &= u(L, t) = 0; \\ u(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, agora as condições de contorno em u são homogêneas. Resolvemos agora um problema bem conhecido para $u(x, t)$ (ver seção 17.3 do livro-texto):

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

⋮

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},$$

$$X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t},$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= -\phi_0(1 - x/L);$$

⋮

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L -\phi_0(1 - x/L) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= -\frac{2\phi_0}{\pi n};$$

$$\phi(x, t) = \phi_0(1 - x/L) - \phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \blacksquare$$

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Obviamente,

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Então,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0,$$

$$f(x) = ax + b,$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow b = 0,$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow a = 1,$$

$$f(x) = x \blacksquare$$

4 [35] Para um domínio retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \\ \phi(a, y) &= 0, \\ \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(x, b) &= \phi_0 x.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= X(x)Y(y), \\ Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} &= 0, \\ \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= \lambda.\end{aligned}$$

Claramente, o candidato a um problema de Sturm-Liouville é a equação em x :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{dx^2} &= \lambda X, \\ X(0) &= 0, \\ X(a) &= 0, \\ \lambda_n &= -\frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ X_n &= \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right).\end{aligned}$$

A equação em y é

$$\begin{aligned}\frac{d^2 Y_n}{dy^2} &= -\lambda Y_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} Y_n, \\ \frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} Y_n &= 0, \\ Y_n &= A_n \cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) + B_n \sinh \left(\frac{n\pi y}{a} \right).\end{aligned}$$

A solução geral é do tipo

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cosh \left(\frac{n\pi y}{L} \right) + B_n \sinh \left(\frac{n\pi y}{L} \right) \right] \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Agora,

$$\phi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0,$$

$$\phi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0,$$

$$A_n = 0;$$

$$\phi(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \phi_0 x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = \phi_0 x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \int_0^a \phi_0 x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx,$$

$$B_m \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) \frac{a}{2} = \int_0^a \phi_0 x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx,$$

$$B_m \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) \frac{a}{2} = -\phi_0 \frac{a^2 (-1)^m}{m\pi},$$

$$B_m = -\phi_0 \frac{2a(-1)^m}{\sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) m\pi} \blacksquare$$

Continue a solução no verso \implies

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [20] Classifique a equação diferencial (elítica, parabólica ou hiperbólica?) abaixo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$A\phi_{xx} + 2B\phi_{xt} + C\phi_{tt} = F,$$

$$A = 1,$$

$$B = 1/2,$$

$$C = 0,$$

$$\Delta = B^2 - AC = 1/4 > 0$$

Portanto, a equação é hiperbólica ■

2 [40] Utilizando **obrigatoriamente** o método das características, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + x \frac{\partial \phi}{\partial x} = xt, \quad \phi(x, 0) = f(x),$$

para $-\infty \leq x \leq +\infty, t \geq 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $\phi = \Phi(s)$, $x = X(s)$ e $t = T(s)$. A derivada total de Φ e a EDP são

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{ds} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{dT}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dX}{ds}, \\ xt &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + x \frac{\partial \phi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Isso nos dá 3 EDOs:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= 1, \\ \frac{dX}{ds} &= X(s), \\ \frac{d\Phi}{ds} &= X(s)T(s). \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} T(s) = s &\quad \Leftrightarrow s = t; \\ \frac{dX}{X} &= ds, \\ \int_{X(0)}^{X(s)} \frac{dX}{X} &= \int_{\sigma=0}^s d\sigma, \\ \ln \left(\frac{X(s)}{X(0)} \right) &= s, \\ X(s) &= X(0)e^s; \\ \frac{d\Phi}{ds} &= X(0)se^s, \\ d\Phi &= X(0)se^s ds, \\ \int_{\Phi(0)}^{\Phi(s)} &= X(0) \int_{\sigma=0}^s \sigma e^\sigma d\sigma, \\ \Phi(s) - \Phi(0) &= X(0) [(s-1)e^s + 1], \\ \Phi(s) &= \Phi(0) + X(0) [(s-1)e^s + 1]. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} X(0) &= X(s)e^{-s} = xe^{-t}; \\ \Phi(0) &= \phi(X(0), T(0)) = \phi(X(0), 0) = f(X(0)) = f(xe^{-t}); \end{aligned}$$

portanto,

$$\phi(x, t) = f(xe^{-t}) + xe^{-t} [(t-1)e^t + 1] \blacksquare$$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

3 [40] Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -kx, \quad \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \quad \phi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, 0) = 0,$$

$k > 0, L > 0$. Obtenha uma solução da forma

$$\phi(x, t) = \psi(x, t) + u(x),$$

onde ψ é uma solução da equação de onda homogênea (sem o termo $-kx$), e $u(x)$ é uma solução de regime permanente, ou seja:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -kx.$$

Você pode usar o seguinte fato:

$$\int_0^L x(L^2 - x^2) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = -\frac{6L^4(-1)^m}{\pi^3 m^3}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A solução $u(x)$, independente do tempo, deve atender a

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + kx = 0, \quad u(0) = u(L) = 0.$$

A solução é

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\frac{kx^2}{2} + A, \\ u(x) &= -\frac{kx^3}{6} + Ax + B \end{aligned}$$

A CC $u(0) = 0$ leva a $B = 0$; a CC $u(L) = 0$ leva a

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{kL^3}{6} + AL, \\ A &= \frac{kL^2}{6}, \\ u(x) &= \frac{k}{6} [x(L^2 - x^2)]. \end{aligned}$$

Como fica o problema em ψ ?

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [\psi + u]}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 [\psi + u]}{\partial t^2} + kx &= 0, \\ \underbrace{\left[\frac{d^2 u}{dx^2} + kx \right]}_{=0} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

Restou, portanto, a equação clássica da onda em uma dimensão. As condições de contorno e iniciais em ψ são:

$$\begin{aligned} 0 = \phi(0, t) = \psi(0, t) + u(0) &\quad \Rightarrow \quad \psi(0, t) = 0, \\ 0 = \phi(L, t) = \psi(L, t) + u(L) &\quad \Rightarrow \quad \psi(L, t) = 0, \\ 0 = \psi(x, 0) + \frac{k}{6} [x(L^2 - x^2)] &\quad \Rightarrow \quad \psi(x, 0) = -\frac{k}{6} [x(L^2 - x^2)], \\ 0 = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} [\psi(x, 0) + u(x)] &\quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Este portanto é um problema de valor de contorno e inicial (a equação da onda) perfeitamente bem especificado. Separando as variáveis em ψ :

$$\begin{aligned} X''T &= \frac{1}{c^2} XT'' \\ \frac{X''}{X} &= \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \lambda \end{aligned}$$

Continue a solução no verso \Rightarrow

Existe agora um problema de Sturm-Liouville em x clássico, e após a usual discussão de sinais obtém-se

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

As soluções para ψ , portanto, deverão ser do tipo

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= \frac{n\pi c}{L} \left[-A_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{L} + B_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, 0) &= 0 \Rightarrow B_n = 0, \\ \psi(x, 0) &= -\frac{k}{6} [x(L^2 - x^2)], \\ -\frac{k}{6} [x(L^2 - x^2)] &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \Rightarrow \\ -\int_0^L \frac{k}{6} [x(L^2 - x^2)] \text{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= A_m \frac{L}{2}, \end{aligned}$$

cujo resultado é

$$A_m = \frac{2k(-1)^m L^3}{m^3 \pi^3}.$$

A solução completa portanto é

$$\phi(x, t) = \frac{k}{6} x(L^2 - x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k(-1)^n L^3}{n^3 \pi^3} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \blacksquare$$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [25] Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -ku,$$

onde $\llbracket c \rrbracket = \text{LT}^{-1}$ e $\llbracket k \rrbracket = \text{T}^{-1}$. Discretize-a, com um esquema **totalmente implícito, progressivo** no tempo e **centrado** no espaço, obtendo

$$Au_{i-1}^{n+1} + Bu_i^{n+1} + Cu_{i+1}^{n+1} = Du_i^n.$$

Encontre A , B , C e D em função de c , k , Δx e Δt .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} &= -ku_i^{n+1}, \\ u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} [u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}] &= -k\Delta t u_i^{n+1}, \\ (1 + k\Delta t) u_i^{n+1} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} [u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}] &= u_i^n, \\ \frac{c\Delta t}{2\Delta x} u_{i+1}^{n+1} + (1 + k\Delta t) u_i^{n+1} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} u_{i-1}^{n+1} &= u_i^n; \Rightarrow \\ A &= \frac{c\Delta t}{2\Delta x}, \\ B &= (1 + k\Delta t), \\ C &= -\frac{c\Delta t}{2\Delta x}, \\ D &= 1 \blacksquare \end{aligned}$$

2 [25] Verifique se

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^1 f^*(x)g(x)w(x) dx,$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções complexas em $[0, 1]$, e $w(x) = x - 1$ é uma função real e **não-positiva** em $[0, 1]$, é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Para que a operação definida acima seja um produto interno legítimo, ela precisa atender às propriedades definidoras

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle &= \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &> 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= 0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_0^1 f^*(x)g(x)w(x) dx \\ &= \int_0^1 [f(x)g^*(x)w(x)]^* dx \\ &= \left[\int_0^1 g^*(x)f(x)w(x) dx \right]^* \\ &= \langle g, f \rangle^*;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f, g + h \rangle &= \int_0^1 f^*(x)[g(x) + h(x)]w(x) dx \\ &= \int_0^1 f^*(x)g(x)w(x) dx + \int_0^1 f^*(x)h(x)w(x) dx \\ &= \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f, \alpha g \rangle &= \int_0^1 f^*(x)[\alpha g(x)]w(x) dx \\ &= \alpha \int_0^1 f^*(x)g(x)w(x) dx \\ &= \alpha \langle f, g \rangle;\end{aligned}$$

Se $f \neq 0$ em $[0, 1]$,

$$\begin{aligned}\langle f, f \rangle &= \int_0^1 f^*(x)f(x)w(x) dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{|f(x)|^2}_{>0} \underbrace{w(x)}_{\leq 0} dx < 0,\end{aligned}$$

e portanto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **não** é um produto interno legítimo ■

3 [25] Obtenha a série **trigonométrica** de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq +1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right];$$

$$L = b - a = 1 - (-1) = 2;$$

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \, d\xi$$

$$= \int_0^1 \xi \, d\xi = \frac{1}{2};$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \cos\left(\frac{2\pi n\xi}{L}\right) \, d\xi$$

$$= \frac{2}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi) \cos\left(\frac{2\pi n\xi}{2}\right) \, d\xi$$

$$= \int_0^1 \xi \cos(\pi n\xi) \, d\xi$$

$$= \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2};$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n\xi}{L}\right) \, d\xi$$

$$= \frac{2}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n\xi}{2}\right) \, d\xi$$

$$= \int_0^1 \xi \operatorname{sen}(\pi n\xi) \, d\xi$$

$$= -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) \right] \blacksquare$$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \\ \phi(0, t) &= 0, \\ \phi(1, t) &= 1, \\ \phi(x, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Sugestão: As condições de contorno não levam a um problema de Sturm-Liouville em ϕ . Faça $\phi(x, t) = u(x, t) + x$. Substitua $u(x) + x$ na equação diferencial parcial. Agora, você vai obter um problema de Sturm-Liouville a partir de $u(x)$. Prossiga.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\phi(x, t) &= u(x, t) + x, \\ \frac{\partial[u + x]}{\partial t} &= \frac{\partial^2[u + x]}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(0, t) &= \phi(0, t) - 0 = 0, \\ u(1, t) &= \phi(1, t) - 1 = 1 - 1 = 0; \\ u(x, t) &= X(x)T(t), \\ X \frac{dT}{dt} &= T \frac{d^2 X}{dx^2}, \\ \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda; \\ \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X &= 0, \\ X(0) &= X(1) = 0; \\ \lambda_n &= n^2 \pi^2, \\ X_n(x) &= \text{sen}(n\pi x); \\ T_n(x) &= e^{-n\pi t}; \\ u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t); \\ u(x, 0) &= \phi(x, 0) - x; \\ -x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x); \\ -x \text{sen}(m\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(n\pi x) \text{sen}(m\pi x); \\ -\int_0^1 x \text{sen}(m\pi x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 \text{sen}(n\pi x) \text{sen}(m\pi x) dx; \\ -\int_0^1 x \text{sen}(m\pi x) dx &= A_m \int_0^1 \text{sen}^2(m\pi x) dx = \frac{A_m}{2}; \\ A_m &= -2 \int_0^1 x \text{sen}(m\pi x) dx = 2 \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi}; \\ \phi(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \text{sen}(n\pi x) e^{-n\pi t} + x \blacksquare\end{aligned}$$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO

Assinatura: _____

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE “PULAR” PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

1 [25] Considere a solução de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

utilizando um esquema de diferenças finitas explícito, “upwind”:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x},$$

onde todos os símbolos têm os significados usuais utilizados no livro-texto. Suponha que você declarou (também da forma usual) o array com as soluções em dois passos de tempo seguidos:

`u = zeros((2,nx+1),float)`

Sejam `old` e `new` os índices para `u` nos instantes n e $n + 1$, e considere que os índices $i=0$ e $i=nx$ indicam o contorno da grade computacional. Escreva o cálculo de `u[new, 1:nx]` **em uma linha de Python**, utilizando *slicing*. Considere que você tem uma variável `Co` com o número de Courant $c\Delta t/\Delta x$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

`u[new, 1:nx] = u[old, 1:nx] - Co*(u[old, 1:nx]-u[old, 0:nx-1])` ■

2 [25] Sejam $P_n(x)$ os polinômios reais de grau n ortogonais no intervalo $x \in [-1, +1]$ em relação ao produto interno usual

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

e tais que $P_0(1) = 1$. Os dois primeiros são

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x.$$

Faça $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ e obtenha a , b e c de tal forma que

$$P_2(1) = 1,$$

$$\langle P_0, P_2 \rangle = 0,$$

$$\langle P_1, P_2 \rangle = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$P_2(1) = a + b + c = 1;$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_0(x)P_2(x) dx &= \int_{-1}^{+1} (ax^2 + bx + c) dx \\ &= \left. \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{2a}{3} + 2c = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_1(x)P_2(x) dx &= \int_{-1}^{+1} x(ax^2 + bx + c) dx \\ &= \left. \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} \right|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{2b}{3} = 0; \end{aligned}$$

donde

$$a = 3/2,$$

$$b = 0,$$

$$c = -1/2 \blacksquare$$

3 [25] Sabendo que

$$\cos((1+k)x) + \cos((1-k)x) = 2 \cos(x) \cos(kx),$$

calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x) [\cos(kx) - i \operatorname{sen}(kx)] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [\cos((1+k)x) + \cos((1-k)x)] dx \\ &= \frac{1}{4\pi(1+k)} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos((1+k)x) dx + \frac{1}{4\pi(1-k)} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos((1-k)x) dx \\ &= \frac{1}{4\pi(1+k)} \operatorname{sen}((1+k)x) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \frac{1}{4\pi(1-k)} \operatorname{sen}((1-k)x) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} \\ &= \frac{2}{4\pi(1+k)} \operatorname{sen}\left(\frac{(1+k)\pi}{2}\right) + \frac{2}{4\pi(1-k)} \operatorname{sen}\left(\frac{(1-k)\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi(1+k)} \operatorname{sen}\left(\frac{(1+k)\pi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi(1-k)} \operatorname{sen}\left(\frac{(1-k)\pi}{2}\right) \blacksquare \end{aligned}$$

4 [25] Utilizando **obrigatoriamente** o método das características, resolva

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} = x,$$
$$u(x, 0) = f(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$x = X(s),$$
$$t = T(s),$$
$$u(x, t) = u(X(s), T(s)) = U(s);$$
$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dT}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dX}{ds},$$
$$x = \frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x};$$
$$\frac{dT}{ds} = 1,$$
$$\frac{dX}{ds} = T(s),$$
$$\frac{dU}{ds} = X(s);$$
$$T(s) = s,$$
$$\frac{dX}{ds} = s,$$
$$\int_{X(0)}^{X(s)} dX = \int_{\sigma=0}^s \sigma d\sigma = \frac{1}{2}s^2;$$
$$X(s) = X(0) + \frac{1}{2}s^2;$$
$$X(0) = X(s) - \frac{1}{2}s^2 = x - \frac{t^2}{2};$$
$$\frac{dU}{ds} = [X(0) + \frac{1}{2}s^2];$$
$$\int_{U(0)}^{U(s)} dU = \int_{\sigma=0}^s [X(0) + \frac{1}{2}\sigma^2] d\sigma,$$
$$U(s) - U(0) = X(0)s + \frac{1}{6}s^3;$$
$$U(0) = u(X(0), T(0)) = u(x - t^2/2, 0) = f(x - t^2/2);$$
$$U(s) = u(x, t) = f(x - t^2/2) + [x - t^2/2]t + \frac{1}{6}t^3 \blacksquare$$

Continue a solução no verso \Rightarrow

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso \Rightarrow