TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 06 Set 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

---

1 [20] Considere o esquema de diferenças finitas *upwind* explícito e condicionalmente estável para a equação da onda:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathrm{Co}[u_i^n - u_{i-1}^n].$$

Considere que a matriz `u` foi alocada com `u = zeros((2,nx+1),float)`, onde `zeros` foi importada de `numpy`, com `nx=1000`, e que você está calculando `u[new]` a partir de `u[old]`, sendo que `old` refere-se ao passo de tempo n, e `new` ao passo de tempo $n+1$. Mostre como, utilizando a técnica de *slicing*, você pode calcular `u[new,1:nx]` **em apenas uma linha de código em Python (usando numpy)**; suponha que a variável `Cou`, com o número de Courant, já foi calculada e que ela garante a estabilidade do esquema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
u[new,1:nx] = u[old,1:nx] - Cou*(u[old,1:nx] - u[old,0:nx-1])
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Considere um esquema de diferenças finitas implícito "clássico" para a equação da difusão:

$$-\mathrm{Fo}u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\mathrm{Fo})u_i^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{i+1}^{n+1} = u_i^n, \qquad i = 1, \ldots, N_x - 1.$$

onde $\mathrm{Fo} = D\Delta t/\Delta x^2$, e D é a difusividade. Sabemos que a equação acima em geral não vale para a primeira ($i = 1$) e última ($i = N_x - 1$) linhas. Obtenha essas linhas para as condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \alpha, \\ \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} &= \beta, \end{aligned}$$

sendo α e β constantes, onde $x = 0$ corresponde ao ponto de grade $i = 0$, e $x = L$ corresponde ao ponto de grade $i = N_x$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: A primeira linha fica

$$\begin{aligned} -\mathrm{Fo}\alpha + (1 + 2\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \mathrm{Fo}u_2^{n+1} &= u_1^n, \\ (1 + 2\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \mathrm{Fo}u_2^n &= u_1^n + \mathrm{Fo}\alpha. \end{aligned}$$

A aproximação da derivada em $x = L$ é

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} \approx \frac{u_{N_x}^{n+1} - u_{N_x-1}^{n+1}}{\Delta x} &= \beta \;\Rightarrow \\ u_{N_x}^{n+1} - u_{N_x-1}^{n+1} &= \beta\Delta x, \\ u_{N_x}^{n+1} &= u_{N_x-1}^{n+1} + \beta\Delta x, \end{aligned}$$

de forma que a última linha fica

$$\begin{aligned} -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1 + 2\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{N_x}^{n+1} &= u_{N_x-1}^n, \\ -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1 + 2\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\left[u_{N_x-1}^{n+1} + \beta\Delta x\right] &= u_{N_x-1}^n, \\ -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1 + \mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\beta\Delta x &= u_{N_x-1}^n, \\ -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1 + \mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} &= u_{N_x-1}^n + \mathrm{Fo}\beta\Delta x \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Considere o espaço vetorial das funções complexas de uma variável real x e quadrado-integráveis em $[0, 1]$, e a operação

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^1 x^2 f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x,$$

onde * indica o conjugado complexo. Verifique se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_0^1 x^2 f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 [f(x) g^*(x)]^*\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\int_0^1 x^2 g^*(x) f(x)\,\mathrm{d}x\right]^* = \langle g, f\rangle^* \ \checkmark \\
\langle f, g+h\rangle &= \int_0^1 x^2 f^*(x)[g(x) + h(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 f^*(x) h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle \ \checkmark \\
\langle f, \alpha g\rangle &= \int_0^1 x^2 f^*(x)[\alpha g(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \alpha \int_0^1 x^2 f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \alpha \langle f, g\rangle \ \checkmark \\
\langle f, f\rangle &= \int_0^1 x^2 f^*(x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x > 0, \ \text{ se } f(x) \neq 0 \text{ em algum sub-intervalo finito de } [0, 1] \ \checkmark \\
\langle f, f\rangle &= \int_0^1 x^2 f^*(x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0, \ \text{ se } f(x) \neq 0 \text{ apenas em conjunto enumerável de pontos de } [0, 1] \ \checkmark
\end{aligned}$$

Trata-se, portanto, de um produto interno legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Obtenha a série de Fourier trigonométrica de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ no intervalo $[a, b] = [0, 1]$, sabendo que

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{-x}\cos(ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{-x}\left[a\,\mathrm{sen}(ax) - \cos(ax)\right]}{1 + a^2} + C,\\
\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}(ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{-x}\left[-\,\mathrm{sen}(ax) - a\cos(ax)\right]}{1 + a^2} + C.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
$a = 0$, $b = 1$, $L = 1$.

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\cos\left(\frac{2n\pi x}{1}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\frac{\mathrm{e}^{-1}[\mathrm{e} - 1]}{4\pi^2n^2 + 1}\\
B_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{1}\right)\mathrm{d}x\\
&= 4\pi n\frac{\mathrm{e}^{-1}[\mathrm{e} - 1]}{4\pi^2n^2 + 1}
\end{aligned}
$$

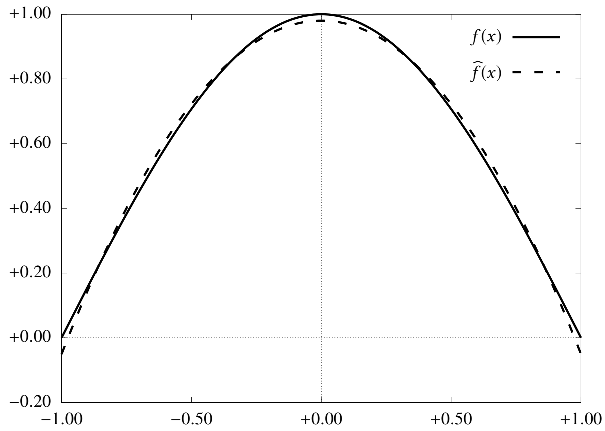
Finalmente, para $x \in [0, 1]$,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1 - \mathrm{e}^{-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-1}[\mathrm{e} - 1]}{4\pi^2n^2 + 1}\cos(2n\pi x) + 2\pi n\frac{\mathrm{e}^{-1}[\mathrm{e} - 1]}{4\pi^2n^2 + 1}\,\mathrm{sen}(2n\pi x)\right]\\
&= (1 - \mathrm{e}^{-1})\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4\pi^2n^2 + 1}\cos(2n\pi x) + \frac{2\pi n}{4\pi^2n^2 + 1}\,\mathrm{sen}(2n\pi x)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Desejamos aproximar a função $f(x) = \cos(\pi x/2)$ em $x \in [-1, 1]$ usando uma base de funções **ortonormais**

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}},\\
p_1(x) &= \sqrt{\frac{3}{2}}x,\\
p_2(x) &= \sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{3x^2-1}{2}\right],\\
&\vdots
\end{aligned}
$$



Sabendo que

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} p_0(x) f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2^{3/2}}{\pi},\\
\int_{-1}^{+1} p_2(x) f(x)\,\mathrm{d}x &= \sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{4\pi^2-48}{\pi^3}\right],
\end{aligned}
$$

obtenha α_1, α_2, e α_3 tais que $\left\|f(x) - \widehat{f}(x)\right\|$ seja mínima, com $\widehat{f}(x) = \alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)$. A $\widehat{f}(x)$ resultante, com os α's corretos, é mostrada na figura. **Justifique sua resposta.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As funções $p_0(x)$, $p_1(x)$ e $p_2(x)$ já são ortonormais (sabemos disso, porque o enunciado nos disse). Por tanto, os α's são

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \langle p_0(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^{+1} p_0(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{3/2}}{\pi},\\
\alpha_1 &= \langle p_1(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^{+1} p_1(x) f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\\
\alpha_2 &= \langle p_2(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^{+1} p_2(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{4\pi^2-48}{\pi^3}\right].
\end{aligned}
$$

Sabemos que $\alpha_1 = 0$ porque o integrando correspondente, $p_1(x)f(x)$, é o produto de uma função ímpar ($p_1(x)$) por uma par ($f(x)$), que é ímpar, e cuja integral é zero ■

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 04 Out 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [20] Para resolver o segundo trabalho computacional, você precisou modificar levemente a rotina `triad`, que resolve um sistema de equações lineares cuja matriz é tridiagonal. A rotina original, disponibilizada no livro-texto, é mostrada abaixo. Indique a lápis quais foram as modificações necessárias.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO (CORRIJA A LÁPIS O CÓDIGO ABAIXO):

A solução é trocar `float` por `complex` em `zeros`:

```
def triad(a,b,c,d):
   n = len(a);
   cc = zeros(n,complex)
   dd = zeros(n,complex)
   cc[0] = c[0]/b[0] ;
   for i in range(1,n-1):
      cc[i] = (c[i])/(b[i] - a[i]*cc[i-1])
   dd[0] = d[0]/b[0] ;
   for i in range(1,n):
      dd[i] = (d[i] - a[i]*dd[i-1])/(b[i] - a[i]*cc[i-1])
   x = zeros(n,complex)
   x[n-1] = dd[n-1] ;
   for i in range (n-2,-1,-1):
      x[i] = dd[i] - cc[i]*x[i+1]
   return x
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Os polinômios de Laguerre de grau n são definidos em $[0, +\infty)$ pela fórmula

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)^n x^n.$$

VOCÊ NÃO VAI PRECISAR USAR A RELAÇÃO DE RECURSÃO NESTA QUESTÃO. Os polinômios de Laguerre formam uma base **ortonormal** das funções reais em $[0, +\infty)$ para o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Os 3 primeiros polinômios são $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$. Para $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$, obtenha α_0, α_1 e α_2 tais que $\left\|h(x) - \widehat{h}(x)\right\|$ seja mínima (**a norma é definida em relação ao produto interno dado acima!**), com $\widehat{h}(x) = \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: A base é ortogonal; então os valores de α_0, α_1 e α_2 que minimizam a norma são simplesmente coeficientes de Fourier de $h(x)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \langle L_0(x), h(x)\rangle = \int_0^\infty 1 \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}(2\mathrm{d}x) = 1/2;\\
\alpha_1 &= \langle L_1(x), h(x)\rangle = \int_0^\infty (1-x) \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^\infty (1-x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = 1/4;\\
\alpha_2 &= \langle L_1(x), h(x)\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = 1/8 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Sabendo que

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{1-k^2}$$

calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\left[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\pi(1-k^2)} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Calcule $\widehat{f}(k)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O cálculo de $\widehat{f}(k)$ é quase imediato:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi i k} \left[-e^{-ikx} \right]_{x=-1}^{x=+1} \\
&= \frac{1}{2\pi i k} \left[e^{ik} - e^{-ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i k} [2i\,\mathrm{sen}(k)] \\
&= \frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Se

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

calcule a transformada de Fourier da EDO

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T^2}y = \frac{1}{T^2}x,$$

(onde T é constante) e obtenha $\widehat{y}(\omega)$ em função de $\widehat{x}(\omega)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T^2}y\right\} &= \mathscr{F}\left\{\frac{1}{T^2}x\right\}\\
(\mathrm{i}\omega)^2\widehat{y}(\omega) + \frac{\mathrm{i}\omega}{T}\widehat{y}(\omega) + \frac{1}{T^2}\widehat{y}(\omega) &= \frac{1}{T^2}\widehat{x}(\omega)\\
\left[-\omega^2 + \frac{\mathrm{i}\omega}{T} + \frac{1}{T^2}\right]\widehat{y}(\omega) &= \frac{1}{T^2}\widehat{x}(\omega)\\
\left[-\omega^2T^2 + \mathrm{i}\omega T + 1\right]\widehat{y}(\omega) &= \widehat{x}(\omega)\\
\widehat{y}(\omega) &= \frac{\widehat{x}(\omega)}{-\omega^2T^2 + \mathrm{i}\omega T + 1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 25 Out 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Dada a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k\phi,$$

onde $D > 0$ e $k > 0$, a sua discretização com um esquema de diferenças finitas totalmente implícito, progressivo no tempo e centrado no espaço, produz uma equação geral do tipo

$$A\phi_{i-1}^{n+1} + B\phi_i^{n+1} + C\phi_{i+1}^{n+1} = \phi_i^n,$$

onde como sempre ϕ_i^n é a aproximação em grade de $\phi(i\Delta x, n\Delta t)$. Obtenha A, B e C em função dos parâmetros adimensionais

$$\begin{aligned}\text{Fo} &= \frac{D\Delta t}{\Delta x^2},\\ \text{Kt} &= k\Delta t.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} &= D\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - k\phi_i^n\\
\phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \frac{D\delta t}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^{n+1}\right) - (k\Delta t)\phi_i^{n+1}\\
\phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \text{Fo}\left(\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^{n+1}\right) - \text{Kt}\phi_i^{n+1}\\
\phi_i^{n+1} - \text{Fo}\left(\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^{n+1}\right) + \text{Kt}\phi_i^{n+1} &= \phi_i^n\\
-\text{Fo}\phi_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\text{Fo} + \text{Kt})\phi_i^{n+1} - \text{Fo}\phi_{i+1}^{n+1} &= \phi_i^n \quad\Rightarrow\\
A &= -\text{Fo},\\
B &= (1 + 2\text{Fo} + \text{Kt}),\\
C &= -\text{Fo}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [20] Dada a matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix},$$

a) [5] Sem fazer nenhum cálculo, o que você pode dizer sobre seus autovalores e autovetores?

b) [5] Calcule os autovalores. Confirme sua resposta sobre (a).

c) [10] Calcule os autovetores. Confirme, com cálculos, sua resposta sobre (b).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

a) $[A]$ é auto-adjunta; logo, os autovalores são reais, e os autovetores são ortogonais.

b) e c) Com Maxima,

```
(%i1) A : matrix([2,1+%i],[1-%i,2]);
                                [   2     %i + 1 ]
(%o1)                           [                ]
                                [ 1 - %i    2    ]
(%i2) eigenvectors(A);
(%o2) [[[2 - sqrt(2), sqrt(2) + 2], [1, 1]],
                    sqrt(2) %i - sqrt(2)            sqrt(2) %i - sqrt(2)
              [[[1, --------------------]], [[1, - --------------------]]]]
                             2                              2
```

b) Os autovalores são

$$\lambda_{\mathrm{i}} = 2 - \sqrt{2},$$
$$\lambda_{\mathrm{ii}} = 2 + \sqrt{2}.$$

c) Os autovetores são

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{i}} = \left(1, \frac{-\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{ii}} = \left(1, \frac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right).$$

Os autovalores são reais, de fato. Os autovetores são ortogonais:

$$\begin{aligned}
\left\langle \boldsymbol{v}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{v}^{\mathrm{ii}} \right\rangle &= [\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{i}}]^* \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{ii}} + [\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{i}}]^* \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{ii}} \\
&= 1 \times 1 + \left(\frac{-\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^* \times \left(\frac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 1 + \left(\frac{-\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^* \left(\frac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 1 + \frac{-2 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2}{4} \\
&= 1 - \frac{4}{4} = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Encontre a função de Green da equação diferencial ordinária

$$
\frac{d\phi}{dx} + \operatorname{sen}(x)\phi(x) = f(x); \qquad \phi(0) = \phi_0.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\phi}{d\xi} + \operatorname{sen}(\xi)\phi(\xi) &= f(\xi) \\
G(x,\xi)\frac{d\phi}{d\xi} + G(x,\xi)\operatorname{sen}(\xi)\phi(\xi) &= G(x,\xi)f(\xi) \\
\int_0^\infty G(x,\xi)\frac{d\phi}{d\xi}\,d\xi + \int_0^\infty G(x,\xi)\operatorname{sen}(\xi)\phi(\xi)\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi \\
G(x,\xi)\phi(\xi)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \phi(\xi)\frac{dG}{d\xi}\,d\xi + \int_0^\infty G(x,\xi)\operatorname{sen}(\xi)\phi(\xi)\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi \\
\underbrace{G(x,\infty)}_{=0}\phi(\infty) - G(x,0)\phi_0 + \int_0^\infty \phi(\xi)\underbrace{\left[-\frac{dG}{d\xi} + G(x,\xi)\operatorname{sen}(\xi)\right]}_{=\delta(\xi-x)}\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Resolvamos, portanto

$$
-\frac{dG}{d\xi} + G(x,\xi)\operatorname{sen}(\xi) = \delta(\xi - x); \qquad G(x,\infty) = 0:
$$

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= u(x,\xi)v(x,\xi); \\
-\left[u\frac{dv}{d\xi} + v\frac{du}{d\xi}\right] + uv\operatorname{sen}(\xi) &= \delta(\xi - x); \\
u\left[-\frac{dv}{d\xi} + v\operatorname{sen}(\xi)\right] - v\frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x); \\
-\frac{dv}{d\xi} + v\operatorname{sen}(\xi) &= 0; \\
\frac{dv}{d\xi} &= v(x,\xi)\operatorname{sen}(\xi); \\
\frac{dv}{v(x,\xi)} &= \operatorname{sen}(\xi)d\xi \\
\int_0^\xi \frac{dv}{v} &= \int_0^\xi \operatorname{sen}(\eta)\,d\eta \\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= -\cos(\eta)\Big|_0^\xi = 1 - \cos(\xi) \\
\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= \exp\left[1 - \cos(\xi)\right] \\
v(x,\xi) &= v(x,0)\exp\left[1 - \cos(\xi)\right].
\end{aligned}
$$

Obtemos agora u:

$$
\begin{aligned}
-v\frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x); \\
-v(x,0)\exp\left[1 - \cos(\xi)\right]\frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x) \\
\frac{du}{d\xi} &= -\frac{1}{v(x,0)}\exp\left[-(1 - \cos(\xi))\right]\delta(\xi - x) \\
u(x,\xi) &= u(x,0) - \frac{1}{v(x,0)}\int_{\eta=0}^{\xi}\exp\left[-(1 - \cos(\eta))\right]\delta(\eta - x)\,d\eta \\
&= u(x,0) - \frac{H(\xi - x)}{v(x,0)}\exp\left[-(1 - \cos(x))\right].
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

A função de Green, portanto, é

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= u(x,\xi)v(x,\xi) \\
&= \left\{ u(x,0) - \frac{H(\xi - x)}{v(x,0)} \exp\left[-(1-\cos(x))\right] \right\} v(x,0) \exp\left[1-\cos(\xi)\right] \\
&= u(x,0)v(x,0) - H(\xi - x) \exp\left[-1+\cos(x)+1-\cos(\xi)\right] \\
&= G(x,0) \exp[1-\cos(\xi)] - H(\xi - x) \exp\left[-1+\cos(x)+(1-\cos(\xi))\right]; \\
&= \{G(x,0) - H(\xi - x) \exp[-(1-\cos(x))]\} \exp[1-\cos(\xi)]
\end{aligned}
$$

aplicando a condição de contorno no infinito,

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0 \;\Rightarrow \\
0 &= [G(x,0) - \exp[-(1-\cos(x))]] \exp[1-\cos(\infty)] \;\Rightarrow \\
G(x,0) &= \exp[-(1-\cos(x))].
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= [1 - H(\xi - x)] \exp[-(1-\cos(x))] \exp[1-\cos(\xi)] \\
&= [1 - H(\xi - x)] \exp[\cos(x) - \cos(\xi)] \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Usando obrigatoriamente o método das características, resolva

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = x^{1/2}, \qquad u(x,0) = f(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Sejam

$$\begin{aligned}
x &= X(s),\\
T &= T(s),\\
u(x,t) &= u(X(s),T(s)) = U(s);\\
\frac{dU}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dT}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dX}{ds}; \Rightarrow\\
\frac{dT}{ds} &= 1 \ \Rightarrow T(s) = \cancelto{0}{T(0)} + s;\\
\frac{dX}{ds} &= X(s) \ \Rightarrow X(s) = X(0)e^{s}.
\end{aligned}$$

A EDO em $U(s)$ será

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{ds} &= X^{1/2}(s)\\
&= [X(0)e^{s}]^{1/2}\\
&= (X(0))^{1/2}e^{s/2} \ \Rightarrow\\
U(s) - U(0) &= 2(X(0))^{1/2}[e^{s/2} - 1].
\end{aligned}$$

Mas $s = t$, e:

$$\begin{aligned}
X &= X(0)e^{s};\\
X(0) &= Xe^{-s} = xe^{-t};\\
u(x,0) &= u(X(0),0) = U(0) = f(X(0)).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
U(s) &= f(X(0)) + 2(X(0))^{1/2}[e^{s/2} - 1];\\
u(x,t) &= f(xe^{-t}) + 2(xe^{-t})^{1/2}[e^{t/2} - 1] \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Encontre os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$
$$y(0) = y'(1) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Discuta os valores de λ:
$\lambda = -k^2 < 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y &= 0;\\
r^2 - k^2 &= 0;\\
r &= \pm k;\\
y(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx);\\
y'(x) &= A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cosh(kx).\\
y(0) = 0 \ &\Rightarrow\ A\cosh(0) + B\,\mathrm{senh}(0) = 0,\\
A &= 0.\\
y'(1) = 0 \ &\Rightarrow B\cosh(1) = 0,\\
B &= 0.
\end{aligned}$$

Portanto não há autovalores para esse caso.
$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= 0;\\
y(x) &= Ax + B.\\
y(0) = 0 \ &\Rightarrow B = 0.\\
y'(1) = 0 \ &\Rightarrow A = 0.
\end{aligned}$$

Portanto não há autovalores para esse caso.
$\lambda = k^2 > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y &= 0;\\
r^2 + k^2 &= 0;\\
r &= \pm i\sqrt{k};\\
y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx).\\
y'(x) &= -A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\\
y(0) = 0 \ &\Rightarrow A = 0.\\
y'(1) &= B\cos(k) = 0 \Rightarrow\\
\cos(k) = 0 \ &\Rightarrow\\
k_n &= \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{2n+1}{2}\pi, \qquad n = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

Portanto os autovalores e as autofunções são

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \left[\frac{2n+1}{2}\pi\right]^2, \qquad n = 0, 1, \ldots\\
y_n(x) &= \mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 25 Out 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

As condições são não-homogêneas. A solução de regime permanente é

$$
\phi(x) = \phi_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right).
$$

Façamos, portanto,

$$
u(x,t) = \phi(x,t) - \phi_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right);
$$

a equação diferencial em $u(x,t)$ é a mesma:

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
$$

com as condições inicial e de contorno

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= 0,\\
u(L,t) &= 0,\\
u(x,0) &= -\phi_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right).
\end{aligned}
$$

Agora

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t);\\
XT' &= a^2 T X'';\\
\frac{T'}{a^2 T} &= \frac{X''}{X} = \lambda.
\end{aligned}
$$

A discussão usual de sinais produz

$$
\begin{aligned}
\lambda &= -k^2 < 0,\\
k_n &= \frac{n\pi}{L},\\
X_n(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
T_n(t) &= \exp\left[-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right].
\end{aligned}
$$

Agora a forma geral da solução é

$$
\phi(x,t) = \phi_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left[-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).
$$

Continue a solução no verso ⟹

Finalmente, impomos a condição inicial:

$$
\begin{aligned}
-\phi_0\left(1-\frac{x}{L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right);\\
-\phi_0\left(1-\frac{x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right);\\
-\int_{x=0}^{L}\phi_0\left(1-\frac{x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{x=0}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x;\\
-\int_{x=0}^{L}\phi_0\left(1-\frac{x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_m \frac{L}{2};\\
A_m &= -\frac{2\phi_0}{m\pi} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Resolva o problema de valor inicial

$$3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = xy, \qquad u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

O método das características se impõe. Se

$$\begin{aligned} x &= X(s), \\ y &= Y(s), \end{aligned}$$

são as equações paramétricas de uma curva no $\mathbb{R}^2$,

$$u = u(x,y) = u(X(s), Y(s)) = U(s),$$

isto é: $u = U(s)$ é uma *nova* função de s. Escrevemos agora lado a lado a equação diferencial parcial original e a derivada total de U:

$$\begin{aligned} xy &= 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

Deste par, obtemos 3 equações ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= 3X(s), & X(0) &= \xi, \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} &= 3, & Y(0) &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= X(s)Y(s), & U(0) &= u(\xi,0) = \mathrm{e}^{-\xi^2}. \end{aligned}$$

Que merecem ser integradas:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{X} &= 3ds, \\ \ln\frac{X}{\xi} &= 3s, \\ X &= \xi\mathrm{e}^{3s}; \\ Y &= 3s; \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \xi\mathrm{e}^{3s}3s, \\ U(s) - U(0) &= 3\xi\int_0^s z\mathrm{e}^{3z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3}. \end{aligned}$$

Recuperamos agora as variáveis originais:

$$\begin{aligned} s &= y/3, \\ \xi &= x/\mathrm{e}^{3s} = x/\mathrm{e}^{y}; \\ u(x,y) = U(s) &= U(0) + \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3} \\ &= \mathrm{e}^{-\xi^2} + \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3} \\ &= \mathrm{e}^{-(x/\mathrm{e}^y)^2} + \frac{((y-1)\mathrm{e}^{y}+1)\,\frac{x}{\mathrm{e}^y}}{3} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Resolva

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

com

$$\phi(0,y) = 0, \qquad \phi(L,y) = 0,$$
$$\phi(x,M) = 0, \qquad \phi(x,0) = f(x).$$

Deixe seu resultado indicado em termos de integrais envolvendo $f(x)$ para os coeficientes de Fourier.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como é comum:

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= X(x)Y(y),\\
YX'' + XY'' &= 0,\\
\frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.
\end{aligned}$$

O sinal de menos para λ é uma conveniência algébrica. Olhe para as condições de contorno: um problema homogêneo (Sturm-Liouville) é imediatamente disponível em x; portanto,

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0,\\
r^2 + \lambda &= 0,\\
r &= \pm \mathrm{i}\sqrt{\lambda},\\
X(x) &= A(x)\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x),\\
X(0) &= X(L) = 0.
\end{aligned}$$

As constantes são:

$$\begin{aligned}
X(0) &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0,\\
X(L) &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}L) = n\pi,\\
\sqrt{\lambda} &= \frac{n\pi}{L},\\
\lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{L^2},\\
X_n(x) &= \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).
\end{aligned}$$

Agora em y:

$$\begin{aligned}
Y'' &= \frac{n^2\pi^2}{L^2}Y,\\
Y'' - \frac{n^2\pi^2}{L^2}Y &= 0,\\
Y_n &= A_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + B_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right).
\end{aligned}$$

As constantes A_n e B_n são obtidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[A_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + B_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\right];\\
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right);\\
\int_{x=0}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_{x=0}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x,\\
A_m &= \frac{2}{L}\int_{x=0}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Com os A_m's calculados, prosseguimos para obter os B_n's:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi M}{L}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi M}{L}\right)\right]; \\
B_n &= -A_n \operatorname{cotgh}\left(\frac{n\pi M}{L}\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Ache a série trigonométrica de Fourier (isto é: a série em senos e cossenos) de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right], \\ A_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi, \\ B_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Prosseguindo no cálculo dos coeficientes,

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{2} \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \\ A_n &= \int_0^1 \xi \cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi = \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi^2 n^2}, \\ B_n &= \int_0^1 \xi \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi = -\frac{\cos(n\pi)}{\pi n} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Se $f(x)$ é uma função qualquer de x, e se sua transformada de Fourier é $\mathscr{F}\{f(x)\}$, mostre que

$$\mathscr{F}\{xf(x)\} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}\{f(x)\}}{\mathrm{d}k},$$

usando obrigatoriamente o fato:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right] = -\mathrm{i}xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\int_{x=-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{-\mathrm{i}}\int_{x=-\infty}^{+\infty} -\mathrm{i}xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{i}}{-\mathrm{i}^2}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}\{f(x)\}}{\mathrm{d}k} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 25 Out 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Seja

$$\tilde{\phi}_i'' = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

a estimativa usual de diferenças finitas para a derivada de ordem 2. Uma estimativa possível para a derivada de ordem 3 é

$$\tilde{\phi}_i''' = \frac{\tilde{\phi}_{i+1}'' - \tilde{\phi}_{i-1}''}{2\Delta x}.$$

Obtenha $\tilde{\phi}_i'''$ em função de $\phi_{i-2}, \ldots \phi_{i+2}$ e Δx.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_i''' &= \frac{1}{2\Delta x}\left[\frac{\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i}{\Delta x^2} - \frac{\phi_i - 2\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{\Delta x^2}\right] \\
&= \frac{1}{2\Delta x^3}\left[\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i - (\phi_i - 2\phi_{i-1} + \phi_{i-2})\right] \\
&= \frac{1}{2\Delta x^3}\left[\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + 2\phi_{i-1} - \phi_{i-2}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Considere o produto interno canônico no espaço das funções reais e quadrado-integráveis no intervalo $[0, +\infty)$,

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^\infty f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Seja $f(x)$ contínua neste espaço, e tal que $f(0)$ existe e é finito; para $k > 0$, calcule

$$\lim_{k\to\infty} \langle f(x), k\exp(-kx) \rangle\,.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

$$\begin{aligned}
\langle f(x), k\cos(kx) \rangle &= \int_{x=0}^\infty f(x) k \exp(-kx)\,\mathrm{d}x \\
u = kx; \qquad \mathrm{d}u &= k\mathrm{d}x; \qquad \Rightarrow \\
\lim_{k\to\infty} \langle f(x), k\cos(kx) \rangle &= \lim_{k\to\infty} \int_{u=0}^\infty f\left(\frac{u}{k}\right) k \exp(-u)\,\frac{\mathrm{d}u}{k} \\
&= f(0) \int_0^\infty \exp(-u)\,\mathrm{d}u = f(0) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Um sensor mede uma variável física x. A resposta y do sensor é modelada pela EDO de ordem 1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}y = \frac{1}{T}\left[x(t) + \epsilon(t)\right],$$

onde T é o *tempo de resposta* do sensor e $\epsilon(t)$ é um erro aleatório cometido pelo sensor a cada instante de tempo. Considerando a definição da transformada de Fourier,

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

onde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ e ω é a frequência angular, obtenha uma expressão para $\widehat{y}^*\widehat{y}$ (onde * indica conjugação) em função de ω, T, $\widehat{x}$ e $\widehat{\epsilon}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\omega\widehat{y} + \frac{1}{T}\widehat{y} &= \frac{1}{T}[\widehat{x} + \widehat{\epsilon}],\\
(1 + \mathrm{i}\omega T)\widehat{y} &= [\widehat{x} + \widehat{\epsilon}],\\
(1 + \mathrm{i}\omega T)^*\widehat{y}^*(1 + \mathrm{i}\omega T)\widehat{y} &= [\widehat{x} + \widehat{\epsilon}]^*[\widehat{x} + \widehat{\epsilon}],\\
(1 - \mathrm{i}\omega T)(1 + \mathrm{i}\omega T)[\widehat{y}^*\widehat{y}] &= \left[\widehat{x}^*\widehat{x} + \widehat{x}^*\widehat{\epsilon} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{x} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{\epsilon}\right],\\
(1 + \omega^2T^2)[\widehat{y}^*\widehat{y}] &= \left[\widehat{x}^*\widehat{x} + \widehat{x}^*\widehat{\epsilon} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{x} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{\epsilon}\right],\\
[\widehat{y}^*\widehat{y}] &= \frac{1}{1 + \omega^2T^2}\left[\widehat{x}^*\widehat{x} + \widehat{x}^*\widehat{\epsilon} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{x} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{\epsilon}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Encontre os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$
$$y'(0) = y(1) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Discuta os valores de λ:
$\lambda = -k^2 < 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} - k^2 y &= 0;\\
r^2 - k^2 &= 0;\\
r &= \pm k;\\
y(x) &= A\cosh(kx) + B\,\text{senh}(kx);\\
y'(x) &= A\,\text{senh}(kx) + B\cosh(kx).\\
y'(0) = 0 \;&\Rightarrow\; A\,\text{senh}(0) + B\cosh(0) = 0,\\
B &= 0.\\
y(1) = 0 \;&\Rightarrow A\cosh(1) = 0,\\
A &= 0.
\end{aligned}$$

Portanto não há autovalores para esse caso.
$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= 0;\\
y(x) &= Ax + B,\\
y'(x) &= A.\\
y'(0) = 0 \;&\Rightarrow A = 0.\\
y(1) = 0 \;&\Rightarrow B = 0.
\end{aligned}$$

Portanto não há autovalores para esse caso.
$\lambda = k^2 > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y &= 0;\\
r^2 + k^2 &= 0;\\
r &= \pm i\sqrt{k};\\
y(x) &= A\cos(kx) + B\,\text{sen}(kx),\\
y'(x) &= -A\,\text{sen}(kx) + B\cos(kx),\\
y'(0) = 0 \;&\Rightarrow B = 0.\\
y(1) = A\cos(k) &= 0 \Rightarrow\\
\cos(k) = 0 \;&\Rightarrow\\
k_n = \frac{\pi}{2} + n\pi &= \frac{2n+1}{2}\pi, \qquad n = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

Portanto os autovalores e as autofunções são

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \left[\frac{2n+1}{2}\pi\right]^2, \qquad n = 0, 1, \ldots\\
y_n(x) &= \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Usando o método de separação de variáveis, resolva o problema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + bx\cos(t),\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= 0,\\
\phi(L,t) &= 0,
\end{aligned}
$$

onde a e b são constantes positivas. **SUGESTÃO:** $\{X_n = \operatorname{sen}(n\pi x/L)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ é um conjunto completo de autofunções que atendem às condições de contorno. Faça $bx\cos(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(t)\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ e $\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As condições de contorno são compatíveis com as autofunções

$$
X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots
$$

que teriam aparecido se não fosse o termo não-homogêneo $bx\cos(t)$ da EDP.
Inicialmente, decompomos a função na base:

$$
bx\cos(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)
$$

Claramente,

$$
f_n(t) = \cos(t), \qquad \forall n.
$$

Prosseguindo,

$$
\begin{aligned}
bx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
bx\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\\
b\int_{x=0}^{L} x\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\int_{x=0}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x\\
b\int_{x=0}^{L} x\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x &= \frac{L}{2}A_m\\
b\frac{(-1)^{m+1}L^2}{m\pi} &= \frac{L}{2}A_m,\\
A_m &= \frac{2b(-1)^{m+1}L}{m\pi}.
\end{aligned}
$$

Fazemos agora

$$
\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)
$$

e substituímos na equação diferencial parcial:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2T_n}{\mathrm{d}t^2}X_n(x) &= a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\frac{\mathrm{d}^2X_n}{\mathrm{d}x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(t)\frac{2b(-1)^{n+1}L}{n\pi}X_n(x); \qquad \Rightarrow\\
\frac{\mathrm{d}^2X_n}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2}X_n(x);\\
\frac{\mathrm{d}^2T_n}{\mathrm{d}t^2} + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}T_n &= \frac{2b(-1)^{n+1}L}{n\pi}\cos(t)
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Resolvemos a equação diferencial não-homogênea:

```
(%i1) edo : 'diff(Tn,t,2) + alpha^2*Tn = beta*cos(t) ;
                            2
                           d Tn         2
(%o1)                      ---- + alpha  Tn = beta cos(t)
                             2
                           dt
(%i2) ode2(edo,Tn,t);
Is alpha zero or nonzero?

nonzero;
                beta cos(t)          %i alpha t          - %i alpha t
(%o2)      Tn = ----------- + %k1 %e           + %k2 %e
                      2
                alpha  - 1
```

Logo,

$$T_n(t) = \underbrace{\frac{2b(-1)^{n+1}L^3}{(n^2\pi^2a^2 - L^2)n\pi}}_{B_n} \cos(t) + C_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right).$$

Neste ponto,

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cos(t) + C_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-B_n \operatorname{sen}(t) + \frac{n\pi a}{L}\left(-C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + D_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

As condições iniciais são

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= 0 \qquad \Rightarrow \\
0 &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + C_n) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \Rightarrow \\
C_n &= -B_n; \\
\frac{\partial \phi(x,0)}{\partial t} &= 0 \qquad \Rightarrow \\
0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi a}{L} D_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \Rightarrow \\
D_n &= 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹