TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 22 Mar 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] As primeiras linhas do arquivo de dados `bhdados.txt`, que contém dados de precipitação acumulada mensal em Belo Horizonte, são mostradas a seguir:

```
# ----------
# BDMEP - INMET
# ----------
# Estação :  BELO HORIZONTE - MG (OMM: 83587)
# Latitude (graus) :  -19.93
# Longitude (graus) :  -43.93
# Altitude (metros):  915.00
# Estação Operante
# Inicio de operação:  03/03/1910
# Periodo solicitado dos dados:  31/12/1980 a 31/12/2011
# Os dados listados abaixo são os que encontram-se digitados no BDMEP
# Hora em UTC
# ----------
# Obs.:  Os dados aparecem separados por ; (ponto e vírgula) no formato txt.
# Para o formato planilha XLS, siga as instruções
# ----------
# Estacao;Data;Hora;PrecipitacaoTotal;
83587;28/02/1981;0000;7.5;
83587;31/03/1981;0000;195;
83587;30/04/1981;0000;83.3;
83587;31/05/1981;0000;7;
83587;30/06/1981;0000;17.5;
83587;31/07/1981;0000;0;
83587;31/08/1981;0000;0;
83587;30/09/1981;0000;0.8;
83587;31/10/1981;0000;120.9;
83587;30/11/1981;0000;404;
83587;31/12/1981;0000;248.2;
83587;31/01/1982;0000;330.5;
83587;28/02/1982;0000;52;
83587;31/03/1982;0000;374.4;
```

O programa `bhclima.py` a seguir lê o arquivo `bhdados.txt`; escreva ao lado de cada linha da listagem abaixo o que a linha faz. **Não exceda o limite de cada linha !!!**

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3   # localização do interpretador de python
# -*- coding: iso-8859-1 -*-            # a codificação deste arquivo é iso-8859-1
from numpy import zeros                 # importa função 'zeros' do módulo numpy
pp = zeros((12,31),float)               # aloca um array pp de floats, 12 linhas, 31 colunas
pp[:,:] = -9999                         # inicializa todos os elementos de pp com -9999
fin = open('bhdados.txt','rt',encoding='iso-8859-1')        # abre bhdados.txt para leitura
for line in fin:               # loop nas linhas do arquivo
   line = line.rstrip()        # remove caracteres não-imprimíveis do fim da linha
   if line[0] == '#':          # se o primeiro caracter da linha for '#' :
      continue                 # passa para a próxima linha
   campo = line.split(';')     # separa a linha em campos: o separador é ';'
   prec = float(campo[3])      # atribui campo[3] a prec, como float
   data = campo[1].split('/')  # separa campo[1] em dia/mes/ano; o separador é '/'
   imes = int(data[1]) - 1     # imes é o índice do mês (0 a 11)
   iano = int(data[2]) - 1981  # iano é o índice do ano (0 a 30)
   pp[imes,iano] = prec        # atribui prec à posição [imes,iano] de pp
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Um tanque de diâmetro D com fluido de massa específica ρ e viscosidade dinâmica μ ($[\![\mu]\!] = \mathsf{M\,L^{-1}T^{-1}}$) possui um agitador mecânico que opera com potência P e velocidade angular ω. Utilizando **obrigatoriamente** como variáveis comuns ρ, D e ω, obtenha os grupos adimensionais que regem o problema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A matriz dimensional é

$$
\begin{array}{c|rrrrr}
 & P & \mu & \rho & D & \omega \\
\hline
\mathsf{M} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\mathsf{L} & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 \\
\mathsf{T} & -3 & -1 & 0 & 0 & -1
\end{array},
$$

cujo posto é 3. Portanto, há $n = 5 - 3 = 2$ grupos adimensionais. Esses grupos são:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= P\rho^a D^b \omega^c, \\
\mathsf{M^0L^0T^0} &= (\mathsf{ML^2T^{-3}})(\mathsf{ML^{-3}})^a(\mathsf{L})^b(\mathsf{T^{-1}})^c,
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
a &= -1, \\
-3a + b &= -2, \\
-c &= 3
\end{aligned}
$$

donde

$$
a = -1,\ b = -5,\ c = -3 \qquad \Rightarrow \qquad \Pi_1 = \frac{P}{\rho D^5 \omega^3}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= \mu\rho^a D^b \omega^c, \\
\mathsf{M^0L^0T^0} &= (\mathsf{ML^{-1}T^{-1}})(\mathsf{ML^{-3}})^a(\mathsf{L})^b(\mathsf{T^{-1}})^c,
\end{aligned}
$$

ou

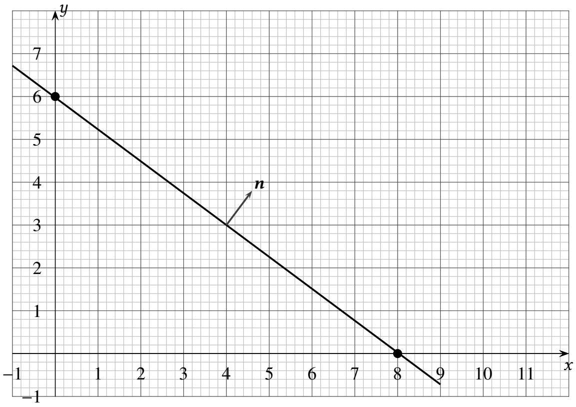
$$
\begin{aligned}
a &= -1, \\
-3a + b &= +1, \\
-c &= 1
\end{aligned}
$$

donde

$$
a = -1,\ b = -4,\ c = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho D^2 \omega} \ \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Obtenha a equação $ax + by = c$ da reta que passa pelos pontos $(0,6)$ e $(8,0)$; escolha a, b e c de tal maneira que $|\boldsymbol{n}| = 1$, onde $n = (a,b)$ é o vetor normal à reta.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
0a + 6b &= c,\\
8a + 0b &= c,\\
a^2 + b^2 &= 1 \ \Rightarrow
\end{aligned}
$$

(com Maxima)

```
(%i1) solve( [6*b = c, 8*a = c, a**2 + b**2 = 1], [a,b,c]);
                  3      4      24          3        4        24
(%o1)       [[a = -, b = -, c = --], [a = - -, b = - -, c = - --]]
                  5      5      5           5        5        5
```

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Você já sabe, de provas passadas, que *em geral*

$$\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \neq [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w};$$

qual é a relação necessária entre os vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ para que

$$\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}?$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \\
&= \epsilon_{ijk} v_i w_j \boldsymbol{e}_k; \\
\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} \\
&= \epsilon_{nkm} u_n a_k \boldsymbol{e}_m \\
&= \epsilon_{nkm} u_n \epsilon_{ijk} v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} u_n v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) u_n v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= u_j v_i w_j \boldsymbol{e}_i - u_i v_i w_j \boldsymbol{e}_j \\
&= u_j w_j v_i \boldsymbol{e}_i - u_i v_i w_j \boldsymbol{e}_j \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k; \\
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w} &= \epsilon_{kmn} b_k w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{kmn} \epsilon_{ijk} u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= u_i v_j w_i \boldsymbol{e}_j - u_i v_j w_j \boldsymbol{e}_i \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}.
\end{aligned}$$

Portanto, em geral,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} &\neq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}, \\
\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] &\neq [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}.
\end{aligned}$$

Agora, para que a igualdade valha,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}, \\
(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u} \implies \\
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{w} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Prove que, para $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, o determinante $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \epsilon_{ijk} u_i v_j (u_k + v_k) \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j u_k + \epsilon_{ijk} u_i v_j v_k \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} u_i v_j u_k + \epsilon_{ijk} u_i v_j u_k) + \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} u_i v_j v_k + \epsilon_{ijk} u_i v_j v_k) \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} u_i v_j u_k + \epsilon_{kji} u_i v_j u_k) + \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} u_i v_j v_k + \epsilon_{ikj} u_i v_j v_k) \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{kji}) u_i v_j u_k + \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj}) u_i v_j v_k \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj})}_{\equiv 0} u_i v_j u_k + \frac{1}{2} \underbrace{(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj})}_{\equiv 0} u_i v_j v_k \\
&= 0 \; \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 26 Abr 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Como você sabe, a rotina da esquerda abaixo implementa a regra do trapézio, cuja fórmula é mostrada à direita.

```
def trapezio(n,a,b,f):
   h = (b-a)/n
   Se = f(a) + f(b)
   Si = 0.0
   for k in range(1,n):
      xk = a + k*h
      Si += f(xk)
   return (Se + 2*Si)*h/2
```

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$$

Considere agora a rotina que implementa o *método de Boole* de integração, que é mais acurado:

```
def boole(n,a,b,f):
   h = (b-a)/n
   sab = 7.0*(f(a) + f(b))
   sim = 0.0
   for k in range(1,n,2):
      xk = a + k*h
      sim += f(xk)
   pass
   sim *= 32.0
   sip = 0.0
   for k in range(2,n-1,4):
      xk = a + k*h
      sip += f(xk)
   pass
   sip *= 12.0
   siq = 0.0
   for k in range(4,n-3,4):
      xk = a + k*h
      siq += f(xk)
   pass
   siq *= 14.0
   return (sab+sim+sip+siq)*2.0*h/45.0
```

$$I = ?$$

Escreva a fórmula correspondente para I no lado direito, supondo que n é par.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$I = \frac{2h}{45}\left[7(f(x_0) + f(x_n)) + 32\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 12\sum_{k=1}^{n/4} f(x_{4k-2}) + 14\sum_{k=2}^{n/4} f(x_{4k-4})\right]$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Calcule o determinante de

$$[\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
2

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Considere a base ortonormal dextrógira F dada por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\\
\boldsymbol{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1),\\
\boldsymbol{f}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).
\end{aligned}$$

Obtenha a matriz de rotação $[C]$ da base canônica E para a base F.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A fórmula geral é

$$C_{ij} = (\boldsymbol{f}_j \cdot \boldsymbol{e}_i)$$

donde

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\\
C_{12} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}},\\
C_{13} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\\
C_{21} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}},\\
C_{22} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{6}},\\
C_{23} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0,\\
C_{31} &= \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}},\\
C_{32} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}},\\
C_{33} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}};
\end{aligned}$$

ou

$$[C] = \begin{bmatrix} +\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{1}{\sqrt{3}} & +\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ +\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Obtenha os autovalores e autovetores da matriz

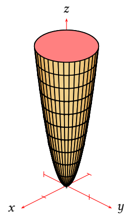
$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i3) a : matrix([1,2,3],[0,3,2],[0,0,1]) ;
                                   [ 1  2  3 ]
                                   [         ]
(%o3)                              [ 0  3  2 ]
                                   [         ]
                                   [ 0  0  1 ]
(%i4) eigenvectors(a);
(%o4)          [[[1, 3], [2, 1]], [[[1, 0, 0]], [[1, 1, 0]]]]
```

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Calcule o volume da região $\mathscr{C}$ delimitada *inferiormente* pelo parabolóide de revolução $z = 5(x^2 + y^2)$ e *superiormente* pelo plano $z = 5$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A projeção do sólido no plano xy é $x^2 + y^2 \le 1$. O volume desejado é

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_{(x^2+y^2)\le 1} [5 - 5(x^2 + y^2)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 5 \iint_{(x^2+y^2)\le 1} [1 - (x^2 + y^2)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 5 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} [1 - r^2]\, r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta \\
&= 10\pi \int_{r=0}^{1} [1 - r^2]\, r\mathrm{d}r \\
&= \frac{5}{2}\pi \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Uma outra forma é

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{z=0}^{5} \int_{x=-\sqrt{z/5}}^{+\sqrt{z/5}} \int_{y=-\sqrt{z/5-x^2}}^{+\sqrt{z/5-x^2}} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z \\
&= \int_{z=0}^{5} \int_{x=-\sqrt{z/5}}^{+\sqrt{z/5}} 2\sqrt{z/5 - x^2}\mathrm{d}x\, \mathrm{d}z \\
&= 2 \int_{z=0}^{5} \frac{\pi z}{10}\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{5} \int_{0}^{5} z\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{5} \times \frac{25}{2} = \frac{5\pi}{2} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 24 Mai 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Dado o algoritmo abaixo,

```
der[0] ← 0 ;
der[1] ← 1 ;
for n = 2 to 15 do
|  r = n mod 4 ;
|  switch r do
|  |  case r = 0 do
|  |  |  der[n] ← 0
|  |  end
|  |  case r = 1 do
|  |  |  der[n] = - 2*der[n-2] ;
|  |  end
|  |  case r = 2 do
|  |  |  der[n] = -2*der[n-1]
|  |  end
|  |  case r = 3 do
|  |  |  der[n] = -der[n-1]
|  |  end
|  end
end
```

traduza-o para Python. **Atenção: ao contrário de Python, o *for* do algoritmo varre n de 2 a 15 inclusive. MAIS ATENÇÃO: DEIXE CLARA SUA INDENTAÇÃO COM LINHAS VERTICAIS COMO NO ALGORITMO ACIMA.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```python
der = [0.0]*16
der[1] = 1.0
for n in range(2,16):
   r = n % 4
   if r == 0 :
      der[n] = 0.0
   elif r == 1 :
      der[n] = -2*der[n-2]
   elif r == 2 :
      der[n] = -2*der[n-1]
   else :
      der[n] = -der[n-1]
   pass
pass
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Resolva o sistema de equações diferenciais lineares acoplado

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix};$$

expanda a sua solução com o auxílio da fórmula de Euler até garantir que $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sejam reais. **Lembre-se de que, na base dos autovetores, o sistema fica desacoplado.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como sempre, supomos inicialmente que o problema está na base canônica. Buscamos a solução $\boldsymbol{u}(t) = u_1(t)\boldsymbol{e}_1 + u_2(t)\boldsymbol{e}_2$. Os autovalores e autovetores do problema são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \mathrm{i}; \qquad & \boldsymbol{f}_1 &= (1, \mathrm{i}),\\ \lambda_2 &= 1 + \mathrm{i}; \qquad & \boldsymbol{f}_2 &= (1, -\mathrm{i}). \end{aligned}$$

Na base dos autovetores o problema é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-\mathrm{i} & 0\\0 & 1+\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t},\\ v_2 &= k_2 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}. \end{aligned}$$

Note que k_1 e k_2, em princípio, são números complexos. A solução do problema, portanto, é

$$\boldsymbol{u}(t) = v_1(t)\boldsymbol{f}_1 + v_2(t)\boldsymbol{f}_2.$$

O retorno à base canônica é imediato:

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = k_1 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\begin{bmatrix}1\\\mathrm{i}\end{bmatrix} + k_2 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

Vamos escolher k_1 e k_2 de tal forma que $u_1(t)$ seja real, na esperança (razoável) de que os mesmos k_1 e k_2 também produzam $u_2(t)$ real. Sejam, por brevidade, $C = \cos(t)$ e $S = \operatorname{sen}(t)$, e

$$\begin{aligned} k_1 &= (A + \mathrm{i}B)/2,\\ k_2 &= (A - \mathrm{i}B)/2; \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= k_1 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + k_2 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{+\mathrm{i}t},\\ &= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{(A + \mathrm{i}B)(C - \mathrm{i}S) + (A - \mathrm{i}B)(C + \mathrm{i}S)\right\}\\ &= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{AC - \mathrm{i}^2BS - \mathrm{i}AS + \mathrm{i}BC + AC - \mathrm{i}^2BS - \mathrm{i}BC + \mathrm{i}AS\right\}\\ &= \mathrm{e}^t\left[AC + BS\right] = \mathrm{e}^t\left[A\cos t + B\operatorname{sen} t\right]. \end{aligned}$$

Repetimos para u_2:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \mathrm{i}k_1 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \mathrm{i}k_2 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{+\mathrm{i}t},\\ &= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{\mathrm{i}(A + \mathrm{i}B)(C - \mathrm{i}S) - \mathrm{i}(A - \mathrm{i}B)(C + \mathrm{i}S)\right\}\\ &= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{\mathrm{i}\left[AC - \mathrm{i}^2BS - \mathrm{i}AS + \mathrm{i}BC\right] - \mathrm{i}\left[AC - \mathrm{i}^2BS - \mathrm{i}BC + \mathrm{i}AS\right]\right\}\\ &= \mathrm{e}^t\left[-\mathrm{i}^2AS + \mathrm{i}^2BC\right] = \mathrm{e}^t\left[A\operatorname{sen} t - B\cos t\right] \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Calcule a divergência de

$$\boldsymbol{v} = (3x^3 + 2y^2 + z, 3y^3 + 2z^2 + x, 3z^3 + 2x^2 + y)$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^3 + 2y^2 + z) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^3 + 2z^2 + x) + \frac{\partial}{\partial z}(3z^2 + 2x^2 + y) \\ &= 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Classifique **completamente** cada uma das equações diferenciais a seguir.

a) [5]

$$y''' + xy = 1$$

b) [5]

$$(y')^2 + y = 0$$

c) [5]

$$x^2y'' + xy' + y = 1$$

d) [5]

$$y'' - 2y' + y = \text{sen}(x)$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Ordem 3, linear, coeficientes não-constantes, não-homogênea.

b) Ordem 1, não-linear, coeficientes constantes, homogênea.

c) Ordem 2, linear, coeficientes não-constantes, não-homogênea.

d) Ordem 2, linear, coeficientes constantes, não-homogênea.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Obtenha a solução geral de

$$\frac{dy}{dx} + \operatorname{sen}(x)y = \operatorname{sen}(x)$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Procuramos uma solução homogênea:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_h}{dx} + \operatorname{sen}(x)y_h &= 0,\\
\frac{dy_h}{dx} &= -\operatorname{sen}(x)y_h,\\
\frac{dy_h}{y_h} &= -\operatorname{sen}(x)\,dx,\\
\ln|y_h| &= \cos(x) + k_1,\\
|y_h| &= \exp(k_1)\exp(\cos(x)) = k_2\exp(\cos(x)) \;\Rightarrow\\
y_h &= k\exp(\cos(x)).
\end{aligned}$$

Agora buscamos uma solução da equação completa na forma

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(x)y_h(x);\;\Rightarrow\\
u(x)\frac{dy_h}{dx} + y_h\frac{du}{dx} + \operatorname{sen}(x)u(x)y_h &= \operatorname{sen}(x);\\
u(x)\left[\frac{dy_h}{dx} + \operatorname{sen}(x)y_h\right] + y_h\frac{du}{dx} &= \operatorname{sen}(x)\\
k\exp(\cos(x))\frac{du}{dx} &= \operatorname{sen}(x);\\
du &= \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{k\exp(\cos(x))} = -\frac{1}{k}\frac{dw}{\exp(w)}
\end{aligned}$$

$(w = \cos(x))$

$$= \frac{1}{k}\exp(-w)d(-w).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{k}\exp(-w) + k_3 = \frac{1}{k}\exp(-\cos(x)) + k_3;\\
y(x) &= u(x)y_h(x) = \left[\frac{1}{k}\exp(-\cos(x)) + k_3\right][k\exp(\cos(x))]\\
&= 1 + (k_3k)\exp(\cos(x)) = 1 + C\exp(\cos(x)) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 19 Jun 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [20] Considere a seguinte modificação do modelo que você utilizou no TC4:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -aSI + cR,\\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= aSI - bI,\\
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= bI - cR
\end{aligned}
$$

Para a rotina padrão de solução com Runge-Kutta,

```
def rk4(x,y,h,ff):
   '''
   rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
   '''
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
```

basta escrever uma `ff` adequada. Escreva a `ff` que resolve o sistema acima, com $a = 0.00001$, $b = 1/14$ e $c = 0.001$. **Indique a indentação cuidadosamente, com linhas verticais.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Supondo que `array` tenha sido importado de `numpy`,

```
def ff(x,y):
    a = 0.00001
    b = 1.0/14.0
    c = 0.001
    return array([-a*y[0]*y[1] + c*y[2], a*y[0]*y[1] - b*y[1], b*y[1]-c*y[2]])
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Expanda

$$f(x,y) = \exp(x+y)$$

em série de Taylor em torno de $(x,y) = (0,0)$ até os termos de ordem 2, ou seja: até os termos em x^2, y^2 e xy.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Até ordem 2, temos

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})$$

As derivadas de interesse são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \exp(x+y); & \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= 1;\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \exp(x+y); & \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= 1;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \exp(x+y); & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} &= 1;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \exp(x+y); & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} &= 1;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \exp(x+y); & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} &= 1.
\end{aligned}$$

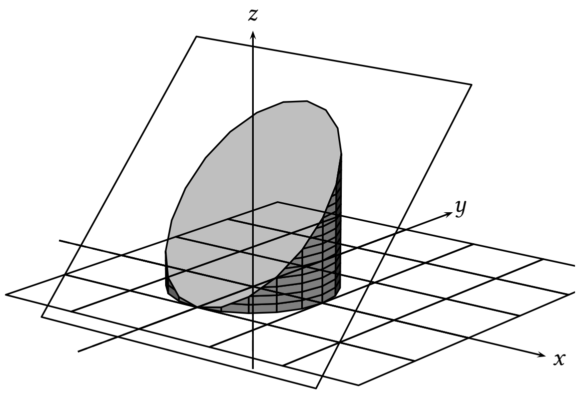
Portanto, em torno de $(0,0)$,

$$f(x,y) \approx 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2xy) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Calcule o volume da região definida pela interseção entre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$ e o plano $-y + z = 1$. **SUGESTÃO: DESENHE!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Eis o desenho:



O plano corta um cilindro de base circular, raio 1, e altura 2, pela metade. Portanto,

$$V = \frac{1}{2}[\pi \times 1^2] \times 2 = \pi.$$

Se você quiser fazer da maneira mais difícil,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= z = 1 + y; \\ y &= r \operatorname{sen}(\theta); \\ z(r,\theta) &= 1 + r \operatorname{sen}(\theta); \\ V &= \iint_{\text{círculo}} z(r,\theta) r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} [1 + r \operatorname{sen}(\theta)] r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \pi \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Usando obrigatoriamente variáveis complexas, integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 - \cos(\theta)}.$$

Sugestão: faça a transformação de variável $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ e transforme a integral acima em uma integral sobre o círculo unitário no plano complexo envolvendo um polo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Fazendo a substituição sugerida, se $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, quando θ vai de 0 a 2π, z percorre o círculo unitário C no plano complexo; então:

$$\begin{aligned}
z &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\\
\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} &= \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
z + \frac{1}{z} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\\
&= [\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)] + [\cos(\theta) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)]\\
&= 2\cos(\theta) \Rightarrow\\
\cos(\theta) &= \frac{z^2+1}{2z}.
\end{aligned}$$

Retornando à integral,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 - \cos(\theta)} &= \oint_C \frac{1}{2 - \frac{z^2+1}{2z}} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}\\
&= \oint_C \frac{2\mathrm{i}}{z^2 - 4z + 1}
\end{aligned}$$

O integrando possui dois polos, $z_1 = 2 - \sqrt{3}$ e $z_2 = 2 + \sqrt{3}$, mas apenas z_1 está dentro do círculo unitário. Portanto,

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}c_{-1}\\
&= 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to z_1} \left[(z - z_1)\frac{2\mathrm{i}}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]\\
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{2\mathrm{i}}{(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})} =\\
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{2\mathrm{i}}{-2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Usando o método de Frobenius, encontre **uma** solução LI de

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + xy = 0$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n},\\
y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1},\\
y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}.\\
x^2y &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n},\\
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1}
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_nx^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} &= 0;\\
r+m &= r+n+1; \Rightarrow\\
n &= m-1;\\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1}x^{r+m};\\
\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_nx^{r+n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n} &= 0;\\
r(r-1)a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-1)a_n + a_{n-1}\right]x^{r+n} &= 0
\end{aligned}$$

As raízes são $r_1 = 1$, e $r_2 = 0$. Tentemos r_2, pois ela *pode* levar a duas soluções LI (ou a nenhuma!):

$$\begin{aligned}
n(n-1)a_n + a_{n-1} &= 0,\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

Partindo de $a_0 \neq 0$, não é possível encontrar a_1, pois temos uma divisão por zero. Logo, a menor raiz não leva a nenhuma solução. Tentemos portanto *uma* solução com $r_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \qquad \text{(sem perda de generalidade)};\\
(n+1)na_n + a_{n-1} &= 0;\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n(n+1)},\\
&\vdots\\
a_n &= \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}.
\end{aligned}$$

A 1ª solução será

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 28 Jun 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Considere a seguinte equação diferencial ordinária não linear:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2 = x^2; \qquad y(0) = 0.$$

Em princípio, ela não pode ser resolvida analiticamente, mas pode ser resolvida numericamente com facilidade com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Para a rotina padrão de solução com Runge-Kutta,

```
def rk4(x,y,h,ff):
   '''
   rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
   '''
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
```

basta escrever uma `ff` adequada. Escreva a `ff` que resolve a equação acima. **Indique a indentação cuidadosamente, com linhas verticais.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
def ff(x,y):
    return (x**2 - y**2)**(0.5)
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Encontre a solução geral de

$$x^2y'' - y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Trata-se de uma equação de Euler; a solução é da forma

$$\begin{aligned}
y &= x^r,\\
y' &= rx^{r-1},\\
y'' &= (r-1)rx^{r-2} \Rightarrow\\
(r-1)rx^r - x^r &= 0,\\
r^2 - r - 1 &= 0,\\
r &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},\\
y &= Ax^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + Bx^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \blacksquare
\end{aligned}$$

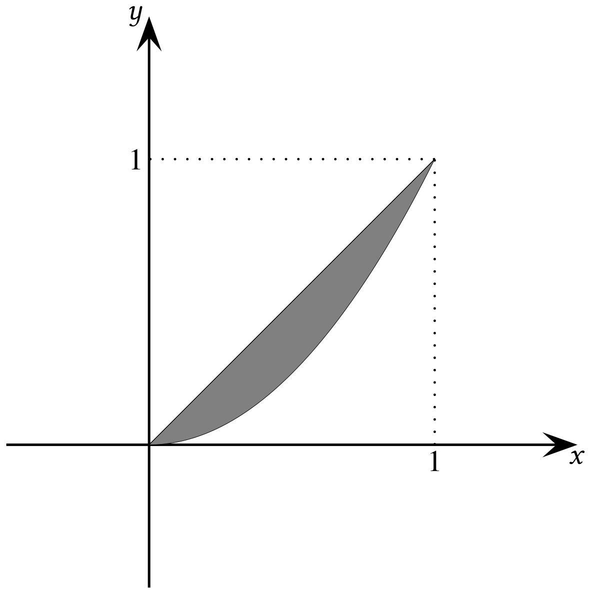
Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Calcule

$$I = \iint_R x \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

onde R é a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x$. **SUGESTÃO: DESENHE!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Eis o desenho:



A integral é

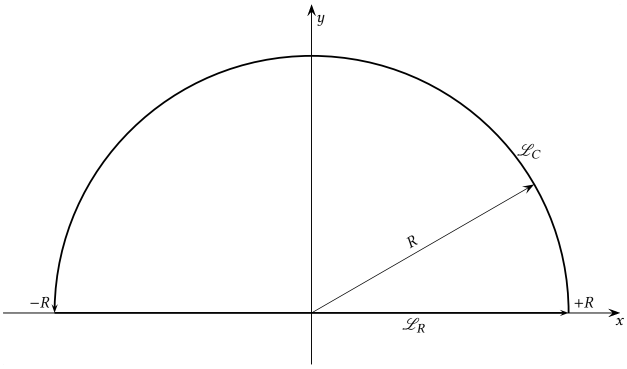
$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} x \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} x \left[x - x^2 \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} \left[x^2 - x^3 \right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{12} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Para a figura ao lado, prove **detalhadamente** que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{L}_C} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z = 0,$$

onde $\mathscr{L}_C$ é o semicírculo mostrado, percorrido no sentido anti-horário.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
z &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};\\
\mathrm{d}z &= \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta;\\
\left|\int_{\mathscr{L}_C} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_{\mathscr{L}_C} \left|\frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z\right|\\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \left|\frac{1}{1+(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^3}\,\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right|\\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R}{|1+R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}|}\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
|1+R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}| &> |R^3|,\\
\frac{1}{|1+R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}|} &< \frac{1}{|R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}|}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathscr{L}_C} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R}{|R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}|}\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{R^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{R^2} \longrightarrow 0 \text{ quando } R \longrightarrow 0 \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Para $a, b > 0$, $a \neq b$, calcule a transformada de Laplace inversa de

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s+b} \times \frac{1}{s+a}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Existem várias soluções possíveis. Uma delas é reconhecer:

$$\mathscr{L}\left\{ \mathrm{e}^{-bt} \right\} = \frac{1}{s+b},$$

donde, pelo Teorema da Convolução,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s+b} \times \frac{1}{s+a} \right\} &= \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-b(t-\tau)}\mathrm{e}^{-a\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt} \right] \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹