TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 31 Ago Mar 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Considere a seguinte seção interativa de Python:

```
> a = [[1,2,3],[4,5,6]]
> b = a
> b[0] = [7,8,9]
> print(a)
```

O que é impresso na linha seguinte?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
[[7, 8, 9], [4, 5, 6]]
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Faça a análise de estabilidade de von Neumann do esquema explícito de diferenças finitas para a equação de advecção

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right).$$

Qual é a sua conclusão (não vale citar de memória) sobre a sua estabilidade?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} = \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right);$$

eliminando o fator comum $\xi_l \mathrm{e}^{at_n+\mathrm{i}k_l i\Delta x}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)\\ &= 1 - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}\,k_l\Delta x.\end{aligned}$$

Claramente, $|\mathrm{e}^{a\Delta t}| > 1$, e o esquema é incondicionalmente instável ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Considere o espaço vetorial dos polinômios de grau 2 definidos em $[-1,+1]$, $\mathbb{P} = \{ax^2 + bx + c\}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) [10] Mostre que $(1, x, x^2)$ é uma base de $\mathbb{P}$.

b) [10] Se $f(x) \in \mathbb{P}$ e $g(x) \in \mathbb{P}$, um produto interno legítimo é

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{+1} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Verifique se a base do item (a) é ortogonal com este produto interno.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Um conjunto de vetores é uma base se:
i) Ele gera o espaço. Dada $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}$, uma combinação linear dos vetores da base gera qualquer vetor do espaço se existem α, β e γ tais que, para quaisquer a, b e c,

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = ax^2 + bx + c.$$

Mas isso é sempre possível para $\alpha = a$, $\beta = b$ e $\gamma = c$, de modo que $(1, x, x^2)$ de fato geram $\mathbb{P}$.
ii) Os vetores da base são LI, ou seja,

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \mathit{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

onde $\mathit{0}$ é a função $f(x) \equiv 0$, em $x \in [-1, +1]$.
O sentido $\Leftarrow$ é óbvio.
Para provar o sentido $\Rightarrow$, escolha 3 valores de x entre -1 e $+1$, por exemplo -1, 0 e 1. Então,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

O sistema acima possui solução única $\alpha = \beta = \gamma = 0$, e isso conclui o item (a).
b) Os produtos internos dos pares de vetores da base são

$$\begin{aligned} \langle 1, x \rangle &= \int_{-1}^{+1} 1\, x\,\mathrm{d}x = 0, \\ \left\langle 1, x^2 \right\rangle &= \int_{-1}^{+1} 1\, x^2\,\mathrm{d}x = 2/3, \\ \left\langle x, x^2 \right\rangle &= \int_{-1}^{+1} x\, x^2\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Logo, a base não é ortogonal.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Obtenha a série de Fourier trigonométrica de $f(x) = 1 - x^2$ no intervalo $[a, b] = [-1, +1]$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Note que f é par! Logo,

$$B_n \equiv 0, \ \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Continuando, $a = -1$, $b = +1$, $L = 2$.

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{2}\right) \, \mathrm{d}x \\
&= 2 \int_0^1 (1 - x^2) \cos\left(\frac{2n\pi x}{2}\right) \, \mathrm{d}x; \\
A_0 &= 2 \int_0^1 (1 - x^2) \, \mathrm{d}x = 4/3; \\
A_n &= 2 \int_0^1 (1 - x^2) \cos(n\pi x) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}, \ n > 0.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Prove a identidade de Parseval para funções complexas de uma variável real em uma forma um pouco mais geral do que a discutida em aula: se

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{\frac{2\pi i m x}{L}}, \\
g(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}},
\end{aligned}
$$

$\alpha \le x \le \beta$, então

$$
\frac{1}{L} \int_\alpha^\beta f^*(x) g(x)\,dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^* b_m
$$

para $L = \beta - \alpha$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Começo notando que

$$
\begin{aligned}
\left\langle e^{\frac{2\pi i n x}{L}}, e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \right\rangle &= \left\| e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \right\|^2 = \int_\alpha^\beta e^{\frac{2\pi i (n-n)x}{L}}\,dx = L, \\
\left\langle e^{\frac{2\pi i m x}{L}}, e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \right\rangle &= \int_\alpha^\beta e^{\frac{2\pi i (n-m)x}{L}}\,dx = 0, \;\; m \ne n.
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f^*(x) g(x)\,dx &= \int_\alpha^\beta \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^* e^{-\frac{2\pi i m x}{L}} \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{+\frac{2\pi i n x}{L}} \right] dx \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_m^* b_n \int_\alpha^\beta e^{\frac{2\pi i (n-m)x}{L}}\,dx \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^* b_m L \\
&= L \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^* b_m \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 31 Ago Mar 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [20] Considere o conjunto das funções **reais** $f(x)$ quadrado-integráveis em $[0, L]$. Mostre que

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Preciso verificar 4 coisas:
a)

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^l g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \langle g, f\rangle\,.\ \text{OK}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\langle f, g+h\rangle &= \int_0^L f(x)[g(x)+h(x)]\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^L \{f(x)g(x)+f(x)h(x)\}\ \mathrm{d}x\\ &= \int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^L f(x)h(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle\,.\ \text{OK}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\langle f, \alpha g\rangle &= \int_0^L f(x)[\alpha g(x)]\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha\int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha\,\langle f, g\rangle\,.\ \text{OK}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= \int_0^L [f(x)]^2\,\mathrm{d}x\\ &\begin{cases} > 0, & f(x)\not\equiv 0,\\ = 0, & f(x)\equiv 0.\end{cases}\ \text{OK}\ \blacksquare\end{aligned}$$

As afirmativas acima valem exceto em um conjunto de medida zero, o que não muda o valor do produto interno em cada caso.

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Uma forma da desigualdade de Cauchy-Schwarz é

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2 \le \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle .$$

Agora sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (a_1, a_2, \ldots, a_n), \\ \boldsymbol{y} &= (1, 1, \ldots, 1), \\ \sum_{i=1}^{n} a_i &= 1. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, prove que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Havia um erro no enunciado: deveria ter sido: Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, prove que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge \frac{1}{n}.$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} (a_i \times 1) \right|^2 &\le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2 \right), \\ 1 &\le n \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right), \\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 &\ge \frac{1}{n} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(\pi + k\pi)\mathrm{e}^{-|k|}}{2},$$

obtenha a transformada de Fourier **exatamente como definida neste curso** de

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUA RESPOSTA.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{(\pi + k\pi)\mathrm{e}^{-|k|}}{2} \\
&= \frac{(1+k)\mathrm{e}^{-|k|}}{4} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Sabendo que

$$\int_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2k^2t}\cos(bk)\,\mathrm{d}k = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{a\sqrt{t}},$$

resolva **usando obrigatoriamente transformada de Fourier em** x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} &= a^2\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},\\ c(x,0) &= \frac{M}{A}\delta(x).\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A transformada de Fourier da equação diferencial é

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}ku\widehat{c} &= -a^2k^2\widehat{c};\\ \frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} &= -[\mathrm{i}ku + a^2k^2]\widehat{c};\\ \widehat{c}(k,t) &= \widehat{c}(k,0)\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}ku+a^2k^2)t}.\end{aligned}$$

O valor inicial é simplesmente

$$\begin{aligned}\widehat{c}(k,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{M}{A}\delta(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{M}{2\pi A}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}c(x,t) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{c}(k,t)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\ &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{M}{2\pi A}\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}ku+a^2k^2)t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\ &= \frac{M}{2\pi A}\int_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ut)}\,\mathrm{d}k\\ &= \frac{M}{2\pi A}\int_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2a^2t}\cos(k(x-ut))\,\mathrm{d}k\\ &= \frac{M}{2\pi A}\frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(x-ut)^2}{4a^2}}}{a\sqrt{t}}\\ &= \frac{M}{A}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-ut)^2}{4a^2}}}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Sejam os pares de transformada de Fourier

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \qquad \leftrightarrow \qquad \widehat{f}(k) = \frac{1}{\pi(k^2+1)};$$

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \leftrightarrow \qquad \widehat{g}(k) = \frac{\mathrm{e}^{-|k|}}{2}.$$

Calcule

$$\widehat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-|\xi|}}{1+(x-\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Trata-se da transformada de Fourier de uma convolução:

$$\begin{aligned}\widehat{h}(k) &= \mathscr{F}\left\{f(x) * g(x)\right\}\\ &= 2\pi \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-|k|}}{k^2+1} \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 31 Out 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} - \mathrm{i}(\phi - 1),$$

com $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, onde τ e ζ são quantidades adimensionais *reais* e ϕ é complexo. Discretize a equação utilizando um esquema totalmene implícito para $\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2}$ e ϕ, e obtenha uma equação na forma

$$A\phi_{i+1}^{n+1} + B\phi_i^{n+1} + C\phi_{i-1}^{n+1} = \phi_i^n + D.$$

Obtenha cada um dos A, B, C e D em função de $\mathrm{Fo} = \Delta\tau/\Delta\zeta^2$ e/ou $\mathrm{Cr} = \Delta\tau$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Discretiza-se em ζ: $i = 0, 1, \ldots, M$.

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta\zeta^2} - \mathrm{i}(\phi_i^{n+1} - 1)\\
\phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left[\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}\right] - \mathrm{i}\mathrm{Cr}(\phi_i^{n+1} - 1).
\end{aligned}$$

Passando todos os termos em $(n+1)$ para o lado esquerdo, e todos os termos em n para o lado direito, tem-se

$$-\frac{\mathrm{Fo}}{2}\phi_{i+1}^{n+1} + (1 + \mathrm{i}\mathrm{Cr} + \mathrm{Fo})\,\phi_i^{n+1} - \frac{\mathrm{Fo}}{2}\phi_{i-1}^{n+1} = \phi_i^n + \mathrm{i}\mathrm{Cr}\ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Obtenha a função de Green de

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{x}{L}\right) y = f(x), \quad y(1) = y_1,$$

onde L é uma constante, e $f(x)$ é o forçante do sistema. **Atenção: esse problema tem condição inicial em $x = 1$: todas as integrais devem ser entre 1 e ∞.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como sempre,

$$\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)y &= G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi},\\
\int_1^\infty G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,d\xi + \int_1^\infty \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)y\,d\xi &= \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=1}^{\xi=\infty} - &\\
\int_1^\infty y\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}\,d\xi + \int_1^\infty \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)y\,d\xi &= \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi\\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,1)y_1 + &\\
\int_1^\infty \left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)G(x,\xi)\right]y(\xi)\,d\xi &= \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi
\end{aligned}$$

Agora escolhemos

$$\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)G(x,\xi)\right] &= \delta(\xi - x),
\end{aligned}$$

e re-escrevemos

$$y(x) = G(x,1)y_1 + \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

Para resolver a equação diferencial em G, fazemos

$$\begin{aligned}
G(x,\xi) &= U(x,\xi)V(x,\xi),\\
-U\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} - V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)UV &= \delta(\xi - x),\\
U\left[-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)V\right] - V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}$$

Como sempre, anulamos o colchete:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)V,\\
\frac{dV}{V} &= \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)d\xi.
\end{aligned}$$

Como queremos $V(x,\xi)$, mudamos a variável de integração para *qualquer coisa* (por exemplo, z), e integramos a partir de $z = 1$ até $z = \xi$:

$$\begin{aligned}
\int_{V(x,1)}^{V(x,\xi)} \frac{dV}{V} &= \int_1^\xi \left[\frac{\mathrm{d}z}{z} - \frac{\mathrm{d}z}{L}\right],\\
\ln\frac{V(x,\xi)}{V(x,1)} &= \ln\frac{\xi}{1} - \frac{\xi - 1}{L},\\
\ln V(x,\xi) &= \ln\xi - \frac{\xi-1}{L} + \ln V(x,1),\\
V(x,\xi) &= V(x,1)\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Ficamos agora com

$$
\begin{aligned}
-V(x,1)\xi \mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x),\\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{1}{V(x,1)\xi}\mathrm{e}^{(\xi-1)/L}\delta(\xi - x).
\end{aligned}
$$

Novamente, mudo de ξ para z e integro de 1 a ξ:

$$
\begin{aligned}
U(x,\xi) &= U(x,1) - \frac{1}{V(x,1)}\int_1^{\xi}\frac{\mathrm{e}^{(z-1)/L}}{z}\delta(z-x)\,\mathrm{d}z,\\
&= U(x,1) - \frac{H(\xi - x)}{V(x,1)}\frac{\mathrm{e}^{(x-1)/L}}{x}.
\end{aligned}
$$

Isso agora nos dá a função de Green:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= U(x,\xi)V(x,\xi)\\
&= \left[U(x,1) - \frac{H(\xi - x)}{V(x,1)}\frac{\mathrm{e}^{(x-1)/L}}{x}\right]V(x,1)\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}\\
&= U(x,1)V(x,1)\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L} - H(\xi - x)\frac{\xi}{x}\mathrm{e}^{\frac{(x-1)-(\xi-1)}{L}}\\
&= G(x,1)\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L} - H(\xi - x)\frac{\xi}{x}\mathrm{e}^{\frac{(x-1)-(\xi-1)}{L}}\\
&= \xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}\left[G(x,1) - H(\xi - x)\frac{\mathrm{e}^{(x-1)/L}}{x}\right].
\end{aligned}
$$

Fazemos agora

$$
G(x,1) = \frac{\mathrm{e}^{(x-1)/L}}{x},
$$

e retornamos:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= \xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}\left[1 - H(\xi - x)\right]\frac{\mathrm{e}^{(x-1)/L}}{x},\\
&= \frac{\xi}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\xi - x}{L}}\left[1 - H(\xi - x)\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Considere o problema de Sturm-Liouville,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda \mathrm{e}^{-2x} y = 0,$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

a) [05] Mostre que a solução geral é da forma

$$y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x \left[A \operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda}x) + B\cosh(\sqrt{1-\lambda}x)\right], & \lambda \neq 1, \\ \mathrm{e}^x (C + Dx), & \lambda = 1. \end{cases}$$

b) [05] Para $\lambda \neq 1$, mostre que $B = 0$, e que $\operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda}\,\pi) = 0$.

c) [10] Agora use $\operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda}\,x) = \mathrm{i}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda - 1}\,x)$, e mostre que os autovalores são $\lambda_n = 1 + n^2$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Expandindo as derivadas,

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda \mathrm{e}^{-2x} y = \\ \mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \lambda \mathrm{e}^{-2x} y = \\ \mathrm{e}^{-2x}\left[y''(x) - 2y'(x) + \lambda y\right]. \end{gathered}$$

A equação característica do termo entre colchetes é

$$r^2 - 2r + \lambda = 0,$$

com soluções $r = (1 \pm \sqrt{1-\lambda})$. O caso $\lambda = 1$ produz uma raiz dupla, e deve ser tratado separadamente. Neste caso, além da solução e^x, encontra-se uma segunda solução LI $x\mathrm{e}^x$. Portanto, para $\lambda = 1$, a solução geral é do tipo $\mathrm{e}^x(C + Dx)$. Para $\lambda \neq 1$, as raízes sao distintas, e

$$y = k_1 \mathrm{e}^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + k_2 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}$$

Faça $k_1 = (B + A)/2$, $k_2 = (B - A)/2$, e obtenha

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^x\left[k_1 \mathrm{e}^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} + k_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}\right] \\ &= \mathrm{e}^x\left[B\frac{\mathrm{e}^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} + \mathrm{e}^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}}{2} + A\frac{\mathrm{e}^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} - \mathrm{e}^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}}{2}\right] \\ &= \mathrm{e}^x\left[B\cosh\sqrt{1-\lambda}\,x + A\operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\,x\right] \ \blacksquare \end{aligned}$$

b) Como $\cosh(0) = 1$, impondo-se $y(0) = 0$ encontra-se $B = 0$. Agora, $\operatorname{senh}(0) = 0$, de modo que resta impor

$$y(\pi) = 0 \ \Rightarrow \ A\operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\,\pi = 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\,\pi = 0,$$

pois A deve ser diferente de zero para fugir da solução trivial $\blacksquare$
c)

$$\begin{gathered} \operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\pi = 0 \\ \mathrm{i}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda - 1}\pi = 0 \\ \sqrt{\lambda - 1} = n \\ \lambda = 1 + n^2 \ \blacksquare \end{gathered}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Resolva o problema de valor inicial

$$3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = xy, \qquad u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O método das características se impõe. Se

$$\begin{aligned} x &= X(s), \\ y &= Y(s), \end{aligned}$$

são as equações paramétricas de uma curva no $\mathbb{R}^2$,

$$u = u(x,y) = u(X(s), Y(s)) = U(s),$$

isto é: $u = U(s)$ é uma *nova* função de s. Escrevemos agora lado a lado a equação diferencial parcial original e a derivada total de U:

$$\begin{aligned} xy &= 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

Deste par, obtemos 3 equações ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= 3X(s), & X(0) &= \xi, \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} &= 3, & Y(0) &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= X(s)Y(s), & U(0) &= u(\xi,0) = \mathrm{e}^{-\xi^2}. \end{aligned}$$

Que merecem ser integradas:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{X} &= 3ds, \\ \ln\frac{X}{\xi} &= 3s, \\ X &= \xi\mathrm{e}^{3s}; \\ Y &= 3s; \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \xi\mathrm{e}^{3s}3s, \\ U(s) - U(0) &= 3\xi\int_0^s z\mathrm{e}^{3z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3}. \end{aligned}$$

Recuperamos agora as variáveis originais:

$$\begin{aligned} s &= y/3, \\ \xi &= x/\mathrm{e}^{3s} = x/\mathrm{e}^{y}; \\ u(x,y) = U(s) &= U(0) + \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3} \\ &= \mathrm{e}^{-\xi^2} + \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3} \\ &= \mathrm{e}^{-(x/\mathrm{e}^y)^2} + \frac{((y-1)\mathrm{e}^{y}+1)\,\frac{x}{\mathrm{e}^y}}{3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Utilizando obrigatoriamente o método de separação de variáveis, $\phi(x,t) = X(x)T(t)$, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi \frac{\partial \phi}{\partial x}; \qquad \phi(0,t) = 0, \qquad \phi(1,0) = 1.$$

Sugestão: a solução é muito parecida com a solução da equação de Boussinesq, só que mais fácil.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Separando-se as variáveis, obtém-se:

$$\begin{aligned} X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= XT\left[T\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right], \\ \frac{1}{T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = c_1. \end{aligned}$$

Resolvendo primeiro em T:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= c_1, \\ \frac{dT}{T^2} &= c_1 dt, \\ -\frac{1}{T} &= c_1 t + c_2, \\ T &= \frac{-1}{c_1 t + c_2}. \end{aligned}$$

Resolvendo X:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= c_1, \\ X &= c_1 x + c_3. \end{aligned}$$

A solução será do tipo

$$\begin{aligned} \phi = XT &= -\frac{c_1 x + c_3}{c_1 t + c_2} \\ &= -\frac{x + c_3/c_1}{t + c_2/c_1} \\ &= -\frac{x + a}{t + b}. \end{aligned}$$

Neste ponto, note que há apenas 2 graus de liberdade, representados pelas constantes a e b, e que correspondem à única condição de contorno e à única condição inicial dadas. Impondo cada uma delas:

$$\begin{aligned} \phi(0,t) = 0 &\Rightarrow -\frac{a}{t+b} = 0 \Rightarrow a = 0; \\ \phi(1,0) = 1 &\Rightarrow -\frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = -1. \end{aligned}$$

Donde

$$\phi(x,t) = -\frac{x}{t-1} = \frac{x}{1-t} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 30 Nov 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] O problema de dispersão atmosférica

$$
\begin{aligned}
U\frac{\partial C}{\partial x} &= K\frac{\partial^2 C}{\partial z^2},\\
\frac{\partial C(x,0)}{\partial z} &= \frac{\partial C(x,h)}{\partial z} = 0,\\
C(0,z) &= \frac{Q}{U}B(z),
\end{aligned}
$$

onde $B(z)$ é um retângulo delgado na altura de emissão, possui discretização

$$
-\mathrm{Fo}C_{i-1}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})C_i^{n+1} - \mathrm{Fo}C_{i+1}^{n+1} = C_i^n, \qquad (\star)
$$

onde

$$
\mathrm{Fo} = \frac{D\Delta x}{U\Delta z^2}
$$

e $i = 1, \ldots, N-1$ (i é o índice do eixo z). As condições de contorno podem ser implementadas numericamente fazendo

$$
C_0 = C_1, \qquad C_{N-1} = C_N.
$$

Escreva ($\star$) para esses dois casos, eliminando em cada caso a variável $C_?$ que **não** pode aparecer.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
1º caso:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Fo}C_0^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})C_1^{n+1} - \mathrm{Fo}C_2^{n+1} &= C_1^n,\\
-\mathrm{Fo}C_1^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})C_1^{n+1} - \mathrm{Fo}C_2^{n+1} &= C_1^n,\\
(1+\mathrm{Fo})C_1^{n+1} - \mathrm{Fo}C_2^{n+1} &= C_1^n \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

2º caso:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Fo}C_{N-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})C_{N-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}C_N^{n+1} &= C_{N-1}^n,\\
-\mathrm{Fo}C_{N-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})C_{N-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}C_{N-1}^{n+1} &= C_{N-1}^n,\\
-\mathrm{Fo}C_{N-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})C_{N-1}^{n+1} &= C_{N-1}^n \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Considere o seguinte fato: se $|f(x)| \leq g(x)$, e $g(x)$ é integrável em um intervalo, então $f(x)$ também é:

$$|f(x)| \leq g(x) \Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Utilizando este fato, mostre que $\operatorname{sen}(x)/x$ é quadrado-integrável em $[0, +\infty)$. **Sugestão: note que $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$. Esta questão é fácil: a solução se baseia no fato de que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2};$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2};$$

$$\operatorname{sen}^2(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq g(x) \ \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Obtenha a série de Fourier **complexa**, no intervalo [0, 1], de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/3; \\ 0, & 1/3 < x \le 1. \end{cases}$$

Você pode deixar os coeficientes de Fourier na forma complexa.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}; \\ a = 0;\ b = 1;\ L &= 1; \\ c_n &= \frac{1}{L} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ c_0 &= 1/3; \\ n \neq 0 \Rightarrow c_n &= \int_0^{1/3} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi n} \left[\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n}{3}} - 1 \right] \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Se

$$\widehat{g}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |k| < k_0, \\ 0, & |k| > k_0, \end{cases}$$

calcule a sua transformada de Fourier inversa $g(x)$, usando a definição adotada neste curso.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-k_0}^{+k_0} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i} x} \int_{-k_0}^{+k_0} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}(\mathrm{i}kx) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i} x} \left[\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_0 x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 x} \right] \\ &= \frac{1}{\pi x} \operatorname{sen}(k_0 x) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Utilizando o método de separação de variáveis, resolva

$$
\begin{aligned}
U\frac{\partial C}{\partial x} &= K\frac{\partial^2 C}{\partial z^2},\\
\frac{\partial C}{\partial x} &= \alpha^2\frac{\partial^2 C}{\partial z^2},\\
\frac{\partial C(x,0)}{\partial z} &= \frac{\partial C(x,h)}{\partial z} = 0,\\
C(0,z) &= \frac{Q}{U}B(z),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 &= \frac{K}{U},\\
B(z) &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & |z-z_e| \le \sigma/2,\\ 0, & |z-z_e| > \sigma/2.\end{cases}
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Tente $C(x,z) = X(x)Z(z)$; a equação fica

$$
\begin{aligned}
Z\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= \frac{K}{U}X\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2};\\
\frac{1}{\alpha^2 X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = \lambda.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno sugerem um problema de Sturm-Liouville em Z:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}[X(x)Z(0)] = 0 \Rightarrow Z'(0) = 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}[X(x)Z(h)] = 0 \Rightarrow Z'(h) = 0.
\end{aligned}
$$

A equação em z fica

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} - \lambda Z = 0,\\
Z'(0) = Z'(h) = 0.
\end{aligned}
$$

Tentemos $\lambda = k^2 > 0$ com $k > 0$; a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
Z(z) &= A\cosh(kz) + B\,\mathrm{senh}(kz);\\
Z'(z) &= k\left[A\,\mathrm{senh}(kz) + B\cosh(kz)\right];\\
Z'(0) = 0 &\Rightarrow kB = 0;\ B = 0;\\
Z'(h) = 0 &\Rightarrow kA\,\mathrm{senh}(kh) = 0;\ A = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda > 0$ leva à solução trivial, que não pode ser autofunção.
Tentemos $\lambda = 0$; a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
Z(z) &= D + Fz;\\
Z'(z) &= F;\\
Z'(0) = 0 &\Rightarrow F = 0;\\
Z'(h) = 0 &\Rightarrow F = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda = 0$ admite a solução não-trivial $Z(z) = D$, desde que $D \neq 0$.
Tentemos $\lambda = -k^2 < 0$, com $k > 0$. A solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
Z(z) &= A\cos(kz) + B\,\mathrm{sen}(kz);\\
Z'(z) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kz) + B\cos(kz)\right];\\
Z'(0) = 0 &\Rightarrow kB = 0;\ B = 0;\\
Z'(h) = 0 &\Rightarrow A\,\mathrm{sen}(kh) = 0;\ k_n h = n\pi;\ k_n = \frac{n\pi}{h}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Os autovalores e as autofunções são

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= -\frac{n^2\pi^2}{h^2},\\
Z_n &= \cos\left(\frac{\pi n z}{h}\right).
\end{aligned}
$$

Usamos agora os autovalores para obter as funções X_n correspondentes:

$$
\begin{aligned}
\lambda_n = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2 X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= 0 \ \Rightarrow X = X_{00}(\text{constante});\\
\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{h^2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2 X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= -\frac{n^2\pi^2}{h^2} \ \Rightarrow X_n(x) = X_{0n}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 x}{h^2}}
\end{aligned}
$$

A solução que atende às condições de contorno é

$$
C(x,z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-k_n^2\alpha^2 x}\cos(k_n z).
$$

Precisamos dos coeficientes de Fourier: em $x = 0$,

$$
\frac{Q}{U}B(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n z).
$$

Para calcular a_0, simplesmente integre:

$$
\begin{aligned}
\frac{Q}{U}\int_0^h B(z)\,dz = h\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^h a_n\cos(k_n z)\,dz}_{\equiv 0} \ \Rightarrow\\
a_0 = \frac{2Q}{hU}.
\end{aligned}
$$

Para os demais coeficientes, $m > 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{Q}{U}B(z)\cos(k_m z) &= \frac{a_0}{2}\cos(k_m z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(k_n z)\cos(k_m z),\\
\frac{Q}{U}\int_0^h B(z)\cos(k_m z)\,dz &= \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,dz,\\
\frac{Q}{U\sigma}\int_{z_e-\sigma/2}^{z_e+\sigma/2} \cos(k_m z)\,dz &= \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,dz,\\
\frac{2Q}{U\sigma k_m}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k_m\sigma}{2}\right)\cos(k_m z_e) &= \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,dz.
\end{aligned}
$$

As funções no lado direito do somatório acima são ortogonais:

$$
\int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,dz = \begin{cases} 0, & m \neq n,\\ h/2 & m = n \neq 0.\end{cases}
$$

Segue-se que

$$
a_m = \frac{4Q}{U\sigma\pi m}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k_m\sigma}{2}\right)\cos(k_m z_e),\ m > 0 \ \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 10 Dez 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] O problema difusivo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\
\phi(x,0) &= f(x),
\end{aligned}
$$

possui discretização

$$
-\mathrm{Fo}\phi_{i-1}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})\phi_i^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_{i+1}^{n+1} = \phi_i^n, \tag{$\star$}
$$

onde

$$
\mathrm{Fo} = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}
$$

e $i = 1, \ldots, N-1$ (i é o índice do eixo x). Modifique ($\star$) para levar em conta as condições de contorno, e mostre como ficam as 1ª e última linhas da matriz do sistema de equações que deve ser resolvido a cada passo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
1º caso:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Fo}\phi_0 + (1+2\mathrm{Fo})\phi_1^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_2^{n+1} &= \phi_1^n,\\
(1+2\mathrm{Fo})\phi_1^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_2^{n+1} &= \phi_1^n + \mathrm{Fo}\phi_0.
\end{aligned}
$$

2º caso:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Fo}\phi_{N-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})\phi_{N-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_N^{n+1} &= \phi_{N-1}^n,\\
-\mathrm{Fo}\phi_{N-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})\phi_{N-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_{N-1}^{n+1} &= \phi_{N-1}^n,\\
-\mathrm{Fo}\phi_{N-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})\phi_{N-1}^{n+1} &= \phi_{N-1}^n \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Considere a série **complexa** de Fourier de $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$. Os seus coeficientes de Fourier são

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}; \\
c_n &= \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-(2\pi \mathrm{i} n x)} \, \mathrm{d}x = \frac{1 + \mathrm{i}\pi n}{2\pi^2 n^2}, \ n \neq 0.
\end{aligned}
$$

Usando a igualdade de Parseval,

$$
\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2,
$$

calcule

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \pi^2 n^2}{4\pi^4 n^4}.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \ \Rightarrow \\
\int_0^1 x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5} &= \frac{1}{9} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2; \\
\frac{2}{45} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \pi^2 n^2}{4\pi^4 n^4} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Se $x(t)$ e $y(t)$ são duas funções relacionadas por

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}y = \frac{1}{T}x,$$

com $T > 0$, e

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

obtenha $\widehat{y}(\omega)$ em funcão de $\widehat{x}(\omega)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\omega\widehat{y} + \frac{1}{T}\widehat{y} &= \frac{1}{T}\widehat{x},\\
(1+\mathrm{i}\omega T)\widehat{y} &= \widehat{x},\\
\widehat{y} &= \frac{\widehat{x}}{1+\mathrm{i}\omega T}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Um problema difusivo envolve o cálculo da concentração $c(x,t)$ de uma espécie química regida pela equação

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= v_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial c}{\partial x}\right],\\ c(x,0) &= 0,\\ c(0,t) &= c_0,\\ c(\infty,t) &= 0.\end{aligned}$$

Sabendo que as dimensões físicas do problema são tais que $[\![c]\!] = [\![c_0]\!]$; $[\![x]\!] = \mathsf{L}$; $[\![t]\!] = \mathsf{T}$ e $[\![v_0]\!] = \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}$, e que as variáveis envolvidas são x, t, v_0, $c(x,t)$ e c_0,

a) [10] Encontre as duas variáveis adimensionais ϕ e ξ que governam o problema, de tal maneira que $\phi = \phi(\xi)$.

b) [10] Agora, utilizando o método de transformação de similaridade, encontre a equação diferencial ordinária de ϕ em ξ, e suas condições de contorno. **NÃO É PRECISO RESOLVER A EQUAÇÃO.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\phi = \frac{c(x,t)}{c_0};\ \xi = \frac{x}{v_0 t}.$$

b) As derivadas que aparecem na equação diferencial parcial são

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= c_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = c_0\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\left[-\frac{x}{v_0 t^2}\right];\\ \frac{\partial c}{\partial x} &= c_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = c_0\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{1}{v_0 t};\\ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} &= c_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{1}{v_0 t}\right] = c_0 \frac{1}{v_0 t}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{1}{v_0 t} = \frac{c_0}{(v_0 t)^2}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}.\end{aligned}$$

Substituindo na equação orignal, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= c_0\left[x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial c}{\partial x}\right],\\ -c_0\left[-\frac{x}{v_0 t^2}\right]\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= v_0 c_0\left[x\frac{1}{(v_0 t)^2}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{v_0 t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right]\\ -\frac{x}{t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= v_0\left[\frac{x}{v_0 t}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right].\end{aligned}$$

A EDO, portanto, será

$$\begin{aligned}\xi\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + (1+\xi)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= 0,\\ \phi(0) &= 1,\\ \phi(\infty) &= 0 \ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Utilizando o método de separação de variáveis, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\
\phi(x,0) &= f(x).
\end{aligned}
$$

Observação: você pode usar o fato de que

$$
\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x = \frac{L}{2}.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser resolvido com a transformação

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \phi(x,t) - \phi_0 \;\Rightarrow\\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t},\\
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},\\
\psi(0,t) &= 0,\\
\frac{\partial \psi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\
\psi(x,0) &= f(x) - \phi_0.
\end{aligned}
$$

Fazemos agora $\psi(x,t) = X(x)T(t)$; a equação fica

$$
\begin{aligned}
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2};\\
\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda.
\end{aligned}
$$

O problema de Sturm-Liouville é

$$
\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0,\; X'(L) = 0.
$$

O problema é difusivo. É razoável proibir $\lambda > 0$. Sempre vale a pena, entretanto, testar $\lambda = 0$: a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A + Bx;\\
X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0,\\
X'(L) = 0 &\Rightarrow B = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor. Para $\lambda = -k^2 < 0$, com $k > 0$, a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A\cos(kx) + B\operatorname{sen}(kx),\\
X'(x) &= k\left[-A\operatorname{sen}(kx) + B\cos(kx)\right]
\end{aligned}
$$

Impondo as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0,\\
X'(L) = 0 &\Rightarrow kB\cos(kL) = 0;\\
\cos(kL) = 0 &\Rightarrow\\
kL &= \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n+1)\pi}{2L};\\
\lambda_n &= -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

A equação em $T_n(t)$ é

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha^2 T_n}\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} &= -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2};\\
\frac{\mathrm{d}T_n}{T_n} &= -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}\,\mathrm{d}t;\\
T_n(t) &= T_0 \exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t\right].
\end{aligned}$$

A solução geral é da forma

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right).$$

Em $t = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) - \phi_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right),\\
[f(x) - \phi_0]\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right),\\
\int_0^L [f(x) - \phi_0]\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x &= B_m \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x,\\
B_m &= \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - \phi_0]\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹