TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 23 Mar 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] O arquivo texto `mississipi.dat` possui os dados de vazão média mensal do rio Mississipi em pés cúbicos por segundo entre 1933 e 2016. As 3 primeiras linhas do arquivo são

```
USGS 07010000 00060 75971 1933 1 123300
USGS 07010000 00060 75971 1933 2 93540
USGS 07010000 00060 75971 1933 3 133500
```

e a última linha é

```
USGS 07010000 00060 75971 2016 12 156400
```

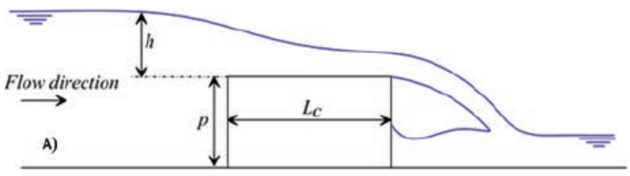
Obviamente, os campos de interesse são os 3 últimos (ano, mês, e vazão média mensal). Escreva um programa em Python **completo** que leia o arquivo e calcule a média de cada mês (sobre todos os anos), e depois imprima no **novo** arquivo texto `mississipi.out` 12 linhas com a vazão média de cada mês para o período 1933–2016. **INDIQUE COM CLAREZA ABSOLUTA A INDENTAÇÃO!!!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```python
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from numpy import array,zeros      # numpy não é essencial, mas é útil
fin = open('mississipi.dat','rt')  # abre o arq de entrada
dmes = zeros(12,float)             # 12 vazões mensais
qq = []                            # lista vazia de vazões ano/mês
for line in fin:                   # loop em todos os dados
   campo = line.split()            # separa os campos
   ano = int(campo[4])             # o ano
   mes = int(campo[5])             # o mês
   vaz  = float(campo[6])          # a vazão média mensal do ano
   print(ano,mes,vaz)              # para ver algo na tela
   dmes[mes-1] = vaz               # guarda a vazão mensal
   if mes == 12:                   # no fim do ano,
      qq.append(dmes)              # inclui na lista qq
   pass
pass
fin.close()                        # fecha o arquivo de saída
qq = array(qq)                     # transf. lista em array
qmed = zeros(12,float)             # vazões médias de longo período
nanos = qq.shape[0]                # número de anos disponíveis
print(nanos)                       # imprime o número de anos
for m in range(12):                # loop nos meses
   for i in range(nanos):          # loop nos anos
      qmed[m] += qq[i,m]           # acumula a média mensal
   pass
   qmed[m] /= nanos                # média sobre o no de anos
pass
fou = open('mississipi.out','wt')  # arquivo de saída
for m in range(12):                # para cada mês...
   fou.write('%02d␣%12.4f\n' % (m+1,qmed[m]))     # imprime a média
pass
fou.close()                        # fecha o arquivo de saída
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Uma soleira é um “degrau” em um canal que pode ser usado, entre outras coisas, para medir a vazão. As variáveis de interesse são a vazão volumétrica Q ($\mathsf{L}^3\,\mathsf{T}^{-1}$), a altura p da soleira (L), o seu comprimento L_c (L) , a largura B (do canal **e** da soleira) (L), e a aceleração da gravidade g ($\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}$). Obtenha os parâmetros adimensionais que você espera que descrevam a física do fenômeno.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
No enunciado faltou listar a altura do escoamento acima da soleira, h, como uma das variáveis, mas isso não impede que os outros 3 parâmetros adimensionais sejam encontrados.
A matriz dimensional é

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & Q & g & p & L_c & h & B \\
\hline
\mathsf{L} & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\mathsf{T} & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array},
$$

cujo posto é 2.
Com 6 variáveis e 2 dimensões fundamentais (L e T), nós esperamos 4 grupos adimensionais. Esses grupos podem ser obtidos sistematicamente fazendo-se:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= Q^{a_1} g^{b_1} p = \frac{g^{1/5} p}{Q^{2/5}}, \\
\Pi_2 &= Q^{a_2} g^{b_2} L_c = \frac{g^{1/5} L_c}{Q^{2/5}}, \\
\Pi_3 &= Q^{a_4} g^{b_4} B = \frac{g^{1/5} B}{Q^{2/5}}, \\
\Pi_4 &= Q^{a_3} g^{b_3} h = \frac{g^{1/5} h}{Q^{2/5}} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Obtenha as coordenadas do vetor $(3, 4, 5)$ na base $((1, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 3))$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\alpha(1,0,0) + \beta(1,2,0) + \gamma(1,2,3) &= (3,4,5),\\
(\alpha + \beta + \gamma, 2\beta + 2\gamma, 3\gamma) &= (3,4,5),\\
\alpha + \beta + \gamma &= 3,\\
2\beta + 2\gamma &= 4,\\
3\gamma &= 5,\\
\alpha &= 1,\\
\beta &= 1/3,\\
\gamma &= 5/3 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] O duplo produto vetorial entre 3 vetores do $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, pode ser definido de duas maneiras:

$$\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \qquad \text{ou} \qquad [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}.$$

Verifique se elas **são ou não são** equivalentes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \\
&= \epsilon_{ijk} v_i w_j \boldsymbol{e}_k; \\
\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} \\
&= \epsilon_{nkm} u_n a_k \boldsymbol{e}_m \\
&= \epsilon_{nkm} u_n \epsilon_{ijk} v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} u_n v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) u_n v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= u_j v_i w_j \boldsymbol{e}_i - u_i v_i w_j \boldsymbol{e}_j \\
&= u_j w_j v_i \boldsymbol{e}_i - u_i v_i w_j \boldsymbol{e}_j \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k; \\
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w} &= \epsilon_{kmn} b_k w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{kmn} \epsilon_{ijk} u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= u_i v_j w_i \boldsymbol{e}_j - u_i v_j w_j \boldsymbol{e}_i \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}.
\end{aligned}$$

Portanto, em geral,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} &\neq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}, \\
\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] &\neq [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Já sabemos que é possível escrever uma transformação linear na base canônica $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ na forma

$$\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j.$$

Se $\boldsymbol{u} = u_k\boldsymbol{e}_k$ é um vetor do $\mathbb{R}^3$, obtenha

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{A}$$

em notação indicial.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{A} &= u_k\boldsymbol{e}_k \cdot A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \\
&= u_k A_{ij}(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j \\
&= u_k A_{ij}\delta_{ki}\boldsymbol{e}_j \\
&= u_i A_{ij}\boldsymbol{e}_j \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 27 Abr 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

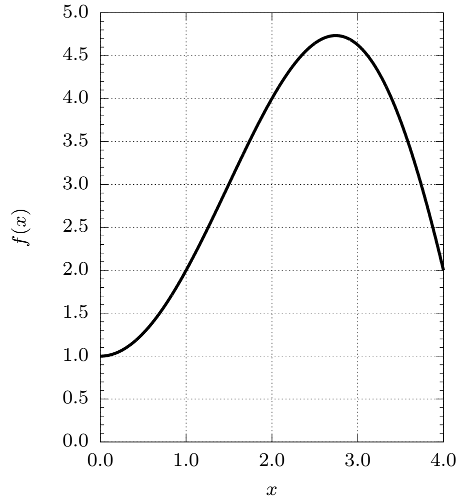
---

1 [20]

a) [10] Dada $f(x)$ definida no intervalo $[x_0, x_0 + 2h]$, deduza a regra de Simpson para 3 pontos interpolando a função $g(x) = ax^2 + bx + c$ através dos pontos (x_0, f_0), (x_1, f_1) e (x_2, f_2).

b) [05] Repetindo a fórmula obtida em (a) para $[x_0 + 2h, x_0 + 4h]$ e juntando as duas, deduza a regra de Simpson para 5 pontos, ou seja: deduza a fórmula para a integral de Simpson de envolvendo (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3) e (x_4, f_4).

c) [10] Use o resultado de (b) para obter numericamente $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, onde $f(x)$ é a função da figura ao lado. Obviamente, você tem que "ler" os valores de $f(x)$ do gráfico.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Faça $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$. Agora

$$
\begin{aligned}
c &= f_0,\\
ah^2 + bh + c &= f_1,\\
4ah^2 + 2bh + c &= f_2.
\end{aligned}
$$

Ou:

$$
\begin{aligned}
ah^2 + bh &= f_1 - f_0,\\
4ah^2 + 2bh &= f_2 - f_0.
\end{aligned}
$$

Ou:

$$
\begin{aligned}
bh &= (f_1 - f_0) - ah^2,\\
4ah^2 + 2\left[(f_1 - f_0) - ah^2\right] &= f_2 - f_0,\\
2ah^2 + 2f_1 - 2f_0 &= f_2 - f_0,\\
2ah^2 &= f_0 - 2f_1 + f_2,\\
a &= \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2h^2},\\
bh &= f_1 - f_0 - \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2},\\
bh &= -(3/2)f_0 + 2f_1 - (1/2)f_2,\\
b &= \frac{-(3/2)f_0 + 2f_1 - (1/2)f_2}{h}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2h} (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^{2h} \\
&= \frac{8ah^3}{3} + \frac{4bh^2}{2} + 2ch \\
&= \frac{8h^3}{3}\left[\frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2h^2}\right] + \frac{4h^2}{2}\left[\frac{-(3/2)f_0 + 2f_1 - (1/2)f_2}{h}\right] + 2f_0h \\
&= h\left[\frac{8}{6}(f_0 - 2f_1 + f_2)\right] + 2h\left[-(3/2)f_0 + 2f_1 - (1/2)f_2\right] + 2f_0 \\
&= h\left[(4/3 - 3 + 2)f_0 + (-8/3 + 4)f_1 + (4/3 - 1)f_2\right] \\
&= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right].
\end{aligned}
$$

b) Some dois trechos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{4h} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right] + \frac{h}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4\right] \\
&= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right].
\end{aligned}
$$

c) $h = 1$;

$$
\begin{aligned}
\int_0^{4} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{1}{3}[1 + 4\times 2 + 2\times 4 + 4\times 4.65 + 2] \\
&= \frac{41.6}{3} = \frac{208}{15}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [20] A *contração* de dois tensores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ é definida por

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j : B_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \equiv A_{ij}B_{lm}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m).$$

Se $\boldsymbol{S}$ é um tensor simétrico de ordem 2, e $\boldsymbol{A}$ é um tensor anti-simétrico de ordem 2:

$$\boldsymbol{S} = S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\ S_{ij} = S_{ji}; \qquad \boldsymbol{A} = A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m,\ A_{lm} = -A_{ml},$$

mostre que

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} &= S_{ij}A_{lm}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m).\\
&= S_{ij}A_{lm}\delta_{jl}\delta_{im}\\
&= S_{ij}A_{ji}\\
&= \frac{1}{2}S_{ij}A_{ji} + \frac{1}{2}S_{ji}A_{ij}\\
&= \frac{1}{2}S_{ij}\left(A_{ji} + A_{ij}\right) = 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Para $x(t), y(t) \in \mathbb{C};\ t \in \mathbb{R}$, resolva (isto é, obtenha a solução geral de):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 3y,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y.$$

Atenção: resolva o problema do começo ao fim com números complexos. Não se preocupe em obter soluções puramente "reais". Fica mais fácil assim!

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Os autovalores e autovetores correspondentes da matriz são:

$$\lambda_1 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{f}_1 = (1, \mathrm{i}/\sqrt{3});$$
$$\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{f}_2 = (1, -\mathrm{i}/\sqrt{3}).$$

Vamos então decompor o vetor com componentes (x, y) na base canônica na base de autovetores:

$$(x, y) = a(1, \mathrm{i}/\sqrt{3}) + b(1, -\mathrm{i}/\sqrt{3});$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}/\sqrt{3} & -\mathrm{i}/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$
$$a = \frac{1}{2}\left(x - \mathrm{i}\sqrt{3}y\right),$$
$$b = \frac{1}{2}\left(x + \mathrm{i}\sqrt{3}y\right).$$

Portanto, na base dos autovetores, o sistema é dado por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Este sistema está na forma diagonal, e tem solução

$$a(t) = A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t},$$
$$b(t) = B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}.$$

Finalmente,

$$x(t) = A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t} + B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t},$$
$$y(t) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\left[A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t} - B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Se $\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ parametriza uma superfície S no $\mathbb{R}^3$, e se $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal a S em cada ponto, então é verdade que

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Portanto, dada uma função vetorial $\boldsymbol{v}(x,y,z)$,

$$I = \int_S (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S = \int_{R_{uv}} \left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \cdot \boldsymbol{v}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Sabendo disso, calcule $I = \int_S (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S$, onde S é a superfície

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= u^2, \\ z &= v, \end{aligned}$$

$0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$, e $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (1-x, 1-y, 1-z)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (1, 2u, 0), \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0,0,1), \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (2u, -1, 0), \\ \boldsymbol{v}(u,v) &= (1-u, 1-u^2, 1-v), \\ \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \cdot \boldsymbol{v} &= -u^2 + 2u - 1, \\ I &= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1} (-u^2 + 2u - 1)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{3} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Se

$$u(x) = x_1 e_1 + x_2^2 e_2 + x_3^3 e_3,$$

Calcule $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 1 + 2x_2 + 3x_3^2 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 25 Mai 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Para os valores de n entre 0 e 15, o programa ao lado *tenta* calcular (div significa divisão inteira)

$$
\begin{aligned}
p &= n \operatorname{div} 4,\\
q &= n \operatorname{div} 2,
\end{aligned}
$$

e

$$
f^n(0) = \begin{cases}
n \mod 4 = 0 & f^n(0) = 0,\\
n \mod 4 = 1 & f^n(0) = (-4)^p,\\
n \mod 4 = 2 & f^n(0) = (-1)^{p+1}2^q,\\
n \mod 4 = 3 & f^n(0) = (-1)^p 2^q,
\end{cases}
$$

mas há um erro. QUE ERRO É ESSE? EM QUE LINHA ELE OCORRE?

```
1  #!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
2  # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3  for n in range(16):
4     p = n // 4
5     q = n / 2
6     r = n % 4
7     if r == 0 :
8        der = 0
9     elif r == 1 :
10       der = (-4)**p
11    elif r == 2 :
12       der = (-1)**(p+1) * 2**q
13    else :
14       der = (-1)**p * 2**q
15    pass
16    print('%4d %4d' % (n,der))
17 pass
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Na linha 5 deveríamos ter `q = n // 2`, porque o operador `//` produz divisão inteira.

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Em um aquífero, a superfície freática é bem representada por

$$h(x,y) = h_0 \left\{ 1 - \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{2L}\right)^2 \right] \right\},$$

onde h_0 e L são constantes com dimensão de comprimento. A condutividade hidráulica saturada é k, e a vazão específica $\boldsymbol{v}$ é dada pela lei de Darcy:

$$\boldsymbol{v} = -k\boldsymbol{\nabla}h.$$

Calcule a derivada de $f(x,y) = |\boldsymbol{v}|$ na direção $\boldsymbol{t} = (1/\sqrt{2})(1,1)$ e no ponto $(x,y) = (L,L)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}h &= \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j}, \\
&= -h_0 \left[\frac{2x}{L^2}\boldsymbol{i} + \frac{y}{2L^2}\boldsymbol{j} \right]; \\
\boldsymbol{v} &= kh_0 \left[\frac{2x}{L^2}\boldsymbol{i} + \frac{y}{2L^2}\boldsymbol{j} \right]; \\
|\boldsymbol{v}|^2 &= k^2h_0^2 \left[\frac{4x^2}{L^4} + \frac{y^2}{4L^4} \right]; \\
|\boldsymbol{v}| = f(x,y) &= kh_0 \left[\frac{4x^2}{L^4} + \frac{y^2}{4L^4} \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Dada $f(x,y)$, a derivada direcional na direção do vetor unitário $\boldsymbol{t}$ é

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\nabla}f.$$

Precisamos portanto do gradiente de f:

$$\boldsymbol{\nabla}f = \frac{kh_0}{2} \left[\frac{4x^2}{L^4} + \frac{y^2}{4L^4} \right]^{-1/2} \left[\frac{8x}{L^4}\boldsymbol{i} + \frac{y}{2L^4}\boldsymbol{j} \right].$$

Em $(x,y) = (L,L)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} &= \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\nabla}f \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \cdot \frac{kh_0}{2} \left[\frac{4}{L^2} + \frac{1}{4L^2} \right]^{-1/2} \left(\frac{8}{L^3}, \frac{1}{2L^3} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \cdot \frac{kh_0}{2} \left[\frac{17}{4L^2} \right]^{-1/2} \left(\frac{8}{L^3}, \frac{1}{2L^3} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \cdot \frac{kh_0}{2} \left[\frac{4L^2}{17} \right]^{1/2} \left(\frac{8}{L^3}, \frac{1}{2L^3} \right) \\
&= \frac{2kh_0L}{2\sqrt{2}\sqrt{17}} \frac{1}{L^3} (8 + 1/2) \\
&= \frac{kh_0}{\sqrt{2}\sqrt{17}L^2} \frac{17}{2} \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}} \frac{kh_0}{L^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Sabendo que

$$A_{\mathscr{S}} = \iint_{R_{uv}} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

e que

$$\int \left[1 + u^2\right]^{1/2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arcsenh}(u) + u(1+u^2)^{1/2}\right],$$

calcule a área da superfície

$$\begin{aligned} x(u,v) &= u, \\ y(u,v) &= v^2/\sqrt{3}, \\ z(u,v) &= u^2 + v^2, \end{aligned}$$

para $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= (u, v^2/\sqrt{3}, u^2 + v^2); \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (1, 0, 2u); \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0, 2v/\sqrt{3}, 2v); \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (1, 0, 2u) \times (0, 2v/\sqrt{3}, 2v) \\ &= (-4uv/\sqrt{3}, -2v, 2v/\sqrt{3}); \\ \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| &= \frac{4v}{\sqrt{3}} \left[1 + u^2\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Na verdade, na última linha acima deve ser $|v|$, mas $0 \le v \le 1$! Prosseguindo:

$$\begin{aligned} A_{\mathscr{S}} &= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1} \frac{4v}{\sqrt{3}} \left[1 + u^2\right]^{1/2} \, \mathrm{d}v \mathrm{d}u \\ &= \int_{u=0}^{1} \frac{2}{\sqrt{3}} \left[1 + u^2\right]^{1/2} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arcsenh}(1) + \sqrt{2}\right] \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Resolva

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = -by^2, \qquad y(0) = y_0,$$

$a > 0$, $b > 0$. Sugestão: faça $y = uv$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $y = uv$:

$$\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + auv &= -bu^2v^2,\\
\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + av\right]u + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -bu^2v^2.
\end{aligned}$$

Obrigue o termo dentro dos colchetes a ser nulo, e resolva:

$$v = v_0\mathrm{e}^{-ax}.$$

Substitua no que restou:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -bu^2v,\\
\frac{\mathrm{d}u}{u^2} &= -bv_0\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x,\\
\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} &= -\frac{bv_0}{a}\left[1 - \mathrm{e}^{-ax}\right],\\
\frac{u - u_0}{uu_0} &= -\frac{b}{a}v_0\left[1 - \mathrm{e}^{-ax}\right],\\
u - u_0 &= -\frac{b}{a}u_0v_0\left[1 - \mathrm{e}^{-ax}\right]u,
\end{aligned}$$

(note que $y_0 = u_0v_0$)

$$u\left[1 + \frac{b}{a}y_0\left(1 - \mathrm{e}^{-ax}\right)\right] = u_0,$$

donde

$$y = uv = \frac{y_0\mathrm{e}^{-ax}}{1 + \frac{b}{a}y_0\left(1 - \mathrm{e}^{-ax}\right)} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Obtenha a solução geral de

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{sen}(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} + (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^x \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 22 Jun 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [20] O seguinte trecho de programa,

```
def ff(x,y):
    a = 0.00001
    b = 1.0/14.0
    return array([-a*y[0]*y[1],a*y[0]*y[1] - b*y[1],b*y[1]])
```

é usado para resolver um sistema de equações

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ f_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ f_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix}$$

com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Baseando-se no código mostrado, escreva as fórmulas de f_1, f_2 e f_3.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} f_1 &= -ay_1y_2, \\ f_2 &= ay_1y_2 - by_2, \\ f_3 &= by_2 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Simplifique **ao máximo** cada uma das expressões abaixo, deixando (no máximo) quantidades reais no denominador. Na resposta final, todas as exponenciais complexas do tipo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ devem ser convertidas para a forma algébrica correspondente, $x + \mathrm{i}y$.

(a) $\dfrac{1}{1-4\mathrm{i}}$ (c) $\left[\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}\right]^{1/4}$

(b) $\left[2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\right]^3$ (d) $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-4\mathrm{i}} &= \frac{1+4\mathrm{i}}{(1-4\mathrm{i})(1+4\mathrm{i})}\\ &= \frac{1+4\mathrm{i}}{1-16\mathrm{i}^2}\\ &= \frac{1+4\mathrm{i}}{17}\ \blacksquare\end{aligned}$$

(b)

$$\left[2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\right]^3 = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = 8\mathrm{i}\ \blacksquare$$

(c)

$$\begin{aligned}w &= \left[\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right]^{1/4}\\ &= \left[\frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right]^{1/4}\\ &= \left[\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right]^{1/4}\\ &= \left[\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+2k\pi)}}{2}\right]^{1/4}\\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+2k\pi)}}{2^{1/2}}\right]^{1/4}\\ &= \frac{1}{2^{1/8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/16+k\pi/2}, \qquad k = 0,1,2,3 \qquad \Rightarrow\\ w_1 &= \frac{1}{2^{1/8}}\left(\cos(\pi/16) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\pi/16)\right),\\ w_2 &= \frac{1}{2^{1/8}}\left(\cos(9\pi/16) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(9\pi/16)\right),\\ w_3 &= \frac{1}{2^{1/8}}\left(\cos(17\pi/16) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(9\pi/16)\right),\\ w_2 &= \frac{1}{2^{1/8}}\left(\cos(25\pi/16) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(25\pi/16)\right)\ \blacksquare\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\mathrm{i}} + \frac{1}{1-\mathrm{i}} &= \frac{(1-\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\\ &= \frac{2}{2} = 1\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Encontre **uma** solução da equação

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

da forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Obtenha a forma geral dos a_n's.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y'' + \frac{1}{x}y' + y &= 0 \\
xy'' + y' + xy &= 0 \\
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1} \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2} \\
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{r+m-1} \\
xy'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n x^{r+n-1}
\end{aligned}$$

Reunindo todos os termos em x^{r+m-1},

$$[a_0 r + a_0(r-1)r]\, x^{r-1} + [a_1(r+1) + a_1 r(r+1)]\, x^r + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n\, [(r+n) + (r+n-1)(r+n)] + a_{n-2}\}\, x^{r+n-1} = 0.$$

A equação indicial é

$$r + r^2 - r = 0 \;\Rightarrow\; r = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = 0.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
a_n\, [n + (n-1)n] + a_{n-2} &= 0 \\
a_n n^2 + a_{n-2} &= 0 \\
a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n^2}.
\end{aligned}$$

Para conseguir uma fórmula geral, note que

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2^2}, \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4^2} = +\frac{a_0}{4^2 \times 2^2} = +\frac{a_0}{(2\times 2)^2 (2\times 1)^2} = +\frac{a_0}{[2^2(2\times 1)]^2}, \\
a_6 &= -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{6^2 \times 4^2 \times 2^2} = -\frac{a_0}{(2\times 3)^2(2\times 2)^2(2\times 1)^2} = -\frac{a_0}{[2^3(3\times 2\times 1)]^2}, \\
&\vdots \\
a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{[2^k k!]^2}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Calcule

$$\oint_{\mathscr{L}} \frac{\zeta^4}{\zeta - [1+\mathrm{i}]}\,\mathrm{d}\zeta,$$

onde $\mathscr{L}$ é o círculo definido por

$$|\zeta - [1+\mathrm{i}]| = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Esta é uma aplicação direta da fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta &= 2\pi\mathrm{i} f(z) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\ [1+\mathrm{i}]^4 \\
&= 2\pi\mathrm{i}\ \left[\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right]^4 \\
&= 2\pi\mathrm{i}\, 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\
&= -8\pi\mathrm{i}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, obtenha a solução de

$$y'' - 2y' + y = \operatorname{sen}(x), \qquad y(0) = 1/2, \qquad y'(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0) - 2[s\overline{y} - y(0)] + \overline{y} &= \frac{1}{1+s^2}\\
s^2\overline{y} - \frac{s}{2} - 2[s\overline{y} - \frac{1}{2}] + \overline{y} &= \frac{1}{1+s^2}\\
(s^2 - 2s + 1)\overline{y} - \frac{s}{2} + 1 &= \frac{1}{1+s^2}\\
(s^2 - 2s + 1)\overline{y} &= \frac{1}{1+s^2} + \frac{s}{2} - 1\\
(s^2 - 2s + 1)\overline{y} &= \frac{(s-1)^2 s}{2(s^2+1)}\\
(s-1)^2\overline{y} &= \frac{(s-1)^2 s}{2(s^2+1)}\\
\overline{y} &= \frac{s}{2(s^2+1)}\\
y &= \frac{1}{2}\cos(x) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 02 Jul 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] A expressão

$$\mathcal{T}_m = \oint_{\mathscr{S}} \epsilon_{lim} r_l n_k T_{ki} \,\mathrm{d}A = \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}A,$$

onde $\mathscr{S}$ é uma superfície fechada que limita uma região $\mathscr{C}$ do $\mathbb{R}^3$, e $\boldsymbol{n} = n_k \boldsymbol{e}_k$ é o vetor unitário normal a $\mathscr{S}$ apontando para fora em cada ponto, é um escalar.

a) Identifique o vetor $\boldsymbol{v}$. Escreva-o da forma mais simples que você conseguir.

b) Agora aplique o teorema da divergência à expressão acima. Não é necessário calcular a divergência que vai aparecer.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\boldsymbol{v} = \epsilon_{lim} r_l T_{ki} \boldsymbol{e}_k.$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_m &= \oint_{\mathscr{S}} \epsilon_{lim} r_l n_k T_{ki} \,\mathrm{d}A \\ &= \int_{\mathscr{C}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\epsilon_{lim} r_l T_{ki}\right) \,\mathrm{d}V \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Resolva:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 1, \qquad y(0) = 1.$$

Você vai precisar de

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{x} e^{-t^2}\, dt.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $y = uv$ e substitua:

$$\begin{aligned}
u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - 2xuv &= 1\\
\underbrace{u\left[\frac{dv}{dx} - 2xv\right]}_{=0} + v\frac{du}{dx} &= 1\\
\frac{dv}{dx} - 2xv &= 0\\
\frac{dv}{v} &= 2x dx\\
\int_{v_0}^{v} \frac{d\eta}{\eta} &= 2\int_0^x \xi d\xi = x^2\\
\ln\frac{v}{v_0} &= x^2\\
v &= v_0 e^{x^2} \Rightarrow\\
v_0 e^{x^2}\frac{du}{dx} &= 1\\
u &= \frac{1}{v_0}\int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi + u_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2v_0}\operatorname{erf}(x) + u_0 \Rightarrow\\
y = uv &= \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2v_0}\operatorname{erf}(x) + u_0\right] v_0 e^{x^2}\\
y &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}\operatorname{erf}(x) + K e^{x^2}; \qquad y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Encontre a solução **geral** de

$$x^2y'' + (x + x^2)y' - y = 0$$

pelo método de Frobenius.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Na forma normal,

$$y'' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

Claramente, $x = 0$ é um ponto singular. Porém,

$$\begin{aligned} xp(x) &= 1 + x, \\ x^2q(x) &= -1. \end{aligned}$$

O ponto singular é regular, e o método de Frobenius é aplicável.
Tente:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}, \end{aligned}$$

e substitua na EDO, obtendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)\right] a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Evidentemente devemos fazer

$$\begin{aligned} m + r &= n + r + 1, \\ m &= n + 1, \\ n &= m - 1; \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(m-1+r)\right] a_{m-1} x^{m-1+r+1} = 0.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} [r^2 - 1]a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)^2 - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n-1+r)\right] a_{n-1} x^{n+r} &= 0, \\ [r^2 - 1]a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[(n+r)^2 - 1\right] a_n + \left[(n-1+r)\right] a_{n-1}\right\} x^{n+r} &= 0. \end{aligned}$$

A equação indicial é

$$r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$$

As raízes diferem por um inteiro; a menor raiz pode levar às duas soluções, ou a nenhuma delas. Tentemos:

$$\begin{aligned} [(n-1)^2 - 1]a_n + [n-2]a_{n-1} &= 0, \\ [n^2 - 2n + 1 - 1]a_n + [n-2]a_{n-1} &= 0, \\ n(n-2)a_n + (n-2)a_{n-1} &= 0, \\ na_n + a_{n-1} &= 0, \\ a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Para $a_0 \neq 0$, esta primeira solução é:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= -1,\\
a_2 &= \frac{1}{2},\\
a_3 &= -\frac{1}{6},\\
&\ \vdots\\
a_n &= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{x}\left[1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right]\\
&= \frac{e^{-x}}{x}
\end{aligned}
$$

Nosso teorema sobre as soluções nos garante que a menor raiz leva a *duas* soluções, mas não nos diz nada sobre como encontrá-las! No nosso caso, há necessidade de uma certa sutileza ou imaginação. Dois caminhos são possíveis:

1. O mais fácil é procurar a solução gerada por $r = +1$. Ela é

$$
\begin{aligned}
[(n+1)^2 - 1]a_n + na_{n-1} &= 0,\\
(n^2 + 2n + 1 - 1)a_n + na_{n-1} &= 0,\\
n(n+2)a_n + na_{n-1} &= 0,\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n+2};
\end{aligned}
$$

   A segunda solução será

$$
y_2 = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{60} + \frac{x^5}{360} - \frac{x^6}{2520} + \dots
$$

   que claramente é linearmente independente de y_1.

2. O mais difícil é encontrar a segunda solução a partir da menor raiz. Suponha então que $a_0 = 0$; neste caso, (lembre-se: para $r = -1$), $a_1 = 0$ necessariamente. A relação de recorrência para o próximo n, 2, fica:

$$
\begin{aligned}
n(n-2)a_n + (n-2)a_{n-1} &= 0,\\
2(0)a_2 + (0)a_1 &= 0,\\
2(0)a_2 + (0)0 &= 0.
\end{aligned}
$$

   Portanto, se $a_0 = a_1 = 0$, a_2 pode ser qualquer. Fazendo, sem perda de generalidade, $a_2 = 1$, teremos então

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -1/3,\\
a_4 &= +1/12,\\
a_5 &= -1/60,\\
a_6 &= 1/360,\\
a_7 &= -1/2520,
\end{aligned}
$$

   etc. Ou, para $n \geq 2$:

$$
a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)(n-2)\dots 3} = \frac{2(-1)^n}{n!}.
$$

   Mudando o índice para que ele comece de 0:

$$
y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+2}x^{m+1}}{(m+2)!} = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{60} + \frac{x^5}{360} - \frac{x^6}{2520} + \dots
$$

   que é o mesmo resultado obtido para $r = +1$ ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, resolva

$$
\begin{aligned}
y^{\text{iv}} - y &= \mathrm{e}^{-t},\\
0 &= y(0) = y'(0) = y''(0),\\
1 &= y'''(0).
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$s^4\overline{y} - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) - \overline{y} = \frac{1}{s+1}.$$

Introduzindo as condições iniciais,

$$
\begin{aligned}
(s^4-1)\overline{y} - 1 &= \frac{1}{s+1},\\
(s^4-1)\overline{y} &= \frac{1}{s+1} + 1,\\
(s^4-1)\overline{y} &= \frac{1}{s+1} + 1,\\
(s^4-1)\overline{y} &= \frac{2+s}{s+1},\\
\overline{y} &= \frac{2+s}{(s^2+1)(s^2-1)(s+1)},\\
\overline{y} &= \frac{2+s}{(s^2+1)(s+1)^2(s-1)}
\end{aligned}
$$

A decomposição em frações parciais da transformada acima é

$$\overline{y} = \frac{s-3}{4(s^2+1)} - \frac{5}{8(s+1)} - \frac{1}{4(s+1)^2} + \frac{3}{8(s-1)}$$

A inversa é :

$$y(t) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen} t + \frac{\cos(t)}{4} + \frac{3\mathrm{e}^{t}}{8} - \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{4} - \frac{5\mathrm{e}^{-t}}{8} \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Usando obrigatoriamente variáveis complexas, integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta}.$$

Sugestão: faça a transformação de variável $z = e^{i\theta}$ e transforme a integral acima em uma integral sobre o círculo unitário no plano complexo envolvendo um polo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Fazendo a substituição sugerida, se $z = e^{i\theta}$, quando θ vai de 0 a 2π, z percorre o círculo unitário C no plano complexo; então:

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta}, \\ \mathrm{d}z &= ie^{i\theta}, \\ \frac{\mathrm{d}z}{iz} &= \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{z} &= e^{i\theta} - e^{-i\theta} \\ &= 2i \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{z^2 - 1}{2iz}. \end{aligned}$$

Retornando à integral,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta} &= \oint_C \frac{1}{2 - \frac{z^2-1}{2iz}} \frac{\mathrm{d}z}{iz} \\ &= \oint_C \frac{-2\mathrm{d}z}{z^2 - 4iz - 1} \end{aligned}$$

O integrando possui dois polos, $z_1 = (2 - \sqrt{3})i$ e $z_2 = (2 + \sqrt{3})i$, mas apenas z_1 está dentro do círculo unitário. Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i c_{-1} \\ &= 2\pi i \lim_{z \to z_1} \left[(z - z_1) \frac{-2}{(z - z_1)(z - z_2)} \right] \\ &= 2\pi i \frac{-2}{z - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹