TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 01 Set 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Dada a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k\phi,$$

e a discretização

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = D\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} - k\phi_i^{n+1},$$

a) [5] Reescreva o esquema de diferenças finitas em termos de

$$\mathrm{Fo} = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2},\ \mathrm{Ka} = k\Delta t,\ \phi_i^{n+1},\ \phi_{i-1}^n,\ \phi_i^n, \mathrm{e} \phi_{i+1}^n.$$

b) [5] O esquema é explícito ou implícito?

c) [15] Determine o fator de amplificação $\mathrm{e}^{a\Delta t}$ da análise de estabilidade de von Neumman em função de Fo, Ka, k_l e Δx. **NÃO É PRECISO VERIFICAR SE O ESQUEMA É ESTÁVEL OU INSTÁVEL.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}
frac\phi_i^{n+1} - \phi_i^n \Delta t &= D\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} - k\phi_i^{n+1},\\
\phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= D\Delta t\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} - k\Delta t\phi_i^{n+1},\\
\phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \mathrm{Fo}\left[\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n\right] + \mathrm{Ka}\phi_i^{n+1},\\
[1+\mathrm{Ka}]\,\phi_i^{n+1} &= \phi_i^n + \mathrm{Fo}\left[\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n\right],\\
\phi_i^{n+1} &= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[\mathrm{Fo}\phi_{i+1}^n + (1-2\mathrm{Fo})\phi_i^n + \mathrm{Fo}\phi_{i-1}^n\right].
\end{aligned}$$

b) Explícito.
c)

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(n+1)\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[\mathrm{Fo}\xi_l\mathrm{e}^{an\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} + (1-2\mathrm{Fo})\xi_l\mathrm{e}^{an\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \mathrm{Fo}\xi_l\mathrm{e}^{an\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right];\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[\mathrm{Fo}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x} + (1-2\mathrm{Fo}) + \mathrm{Fo}\xi_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right];\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[2\mathrm{Fo}\cos(k_l\Delta x) + (1-2\mathrm{Fo})\right];\\
&= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[2\mathrm{Fo}\left(\cos(k_l\Delta x)-1\right)+1\right].
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\cos(2x) - 1 &= -2\,\mathrm{sen}^2(x);\\
2\mathrm{Fo}\left[\cos(k_l\Delta x) - 1\right] &= -4\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right);\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[1 - 8\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) + 16\mathrm{Fo}^2\,\mathrm{sen}^4\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Uma competência importante em métodos numéricos é a comparação de um método numérico com resultados analíticos conhecidos. No quadriculado abaixo, escreva um programa **completo** em Python que calcule

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

com precisão melhor do que 10^{-4}. **Sugestão:** para alguns valores de n, os termos são nulos. Quais? Evite-os em seu programa. **OBEDEÇA RIGOROSAMENTE AS REGRAS DE "INDENTAÇÃO" DE PYTHON, E ESCREVA UM CARACTERE EM CADA QUADRADO. ESCREVA A LÁPIS PARA FACILITAR A CORREÇÃO DE ERROS**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
from math import sin, cos, pi
V = 0
n = 1
eps = 1.0e-4
dif = eps
while abs(dif) >= eps :
   dif = 2*(1-cos(n*pi))*sin(n*pi/2)/(n**2 * pi**2)
   V += dif
   print(n,dif)
   n += 2
pass
print('V = %8.4f' % V)
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Calcule a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + \mathrm{i}\frac{x}{|x|}, & x \in [-1, 1] \wedge x \neq 0. \end{cases}$$

ATENÇÃO: x é real, mas $f(x)$ é complexa!

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
É sempre bom calcular c_0 separadamente para evitar problemas com n no denominador. Note que ambas as partes real e imaginária de $f(x)$ são funções *ímpares*. Portanto,

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Para $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n x}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{e}^{-\pi i n x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0_-} [x - \mathrm{i}]\mathrm{e}^{-\pi i n x}\,\mathrm{d}x + \int_{0_+}^{1} [x + \mathrm{i}]\mathrm{e}^{-\pi i n x}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{+1} x\mathrm{e}^{-\pi i n x}\,\mathrm{d}x + \int_{0_+}^{1} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi i n x}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0_-} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi i n x}\,\mathrm{d}x\right] \end{aligned}$$

Convém separar as contas:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} x\mathrm{e}^{-\pi i n x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{+1} [x\cos(\pi n x) - \mathrm{i}x\,\mathrm{sen}(\pi n x)]\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{i}\int_{-1}^{+1} x\,\mathrm{sen}(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\mathrm{i}\cos(n\pi)}{n\pi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0_+}^{1} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi i n x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi n}\left[1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi n}\right]; \\ -\int_{-1}^{0_-} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi i n x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi n}\left[1 - \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\pi n}\right]. \end{aligned}$$

Portanto,

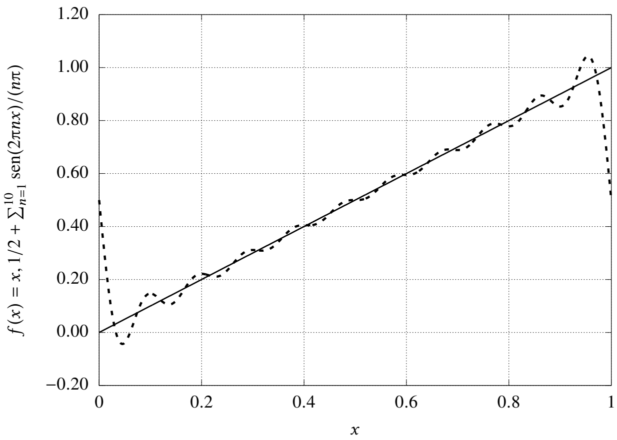
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\mathrm{i}\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{\pi n} - \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi n}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[\mathrm{i}\cos(n\pi) + 1 - \cos(n\pi)\right]. \end{aligned}$$

A série de Fourier complexa será

$$\begin{aligned} x + \mathrm{i}\frac{x}{|x|} &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi) + \mathrm{i}\cos(n\pi)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi) + \mathrm{i}\cos(n\pi)\right]\mathrm{sen}(n\pi x) \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Veja a figura a seguir para uma série de Fourier truncada de $f(x) = x$,



e considere a aproximação

$$f(x) \approx \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2\pi n x), \qquad 0 \le x \le 1$$

mostrada com a linha tracejada. Na base $\{1, \operatorname{sen}(2\pi x), \cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi 2x), \cos(2\pi 2x), \operatorname{sen}(2\pi 3x), \cos(2\pi 3x), \ldots\}$, o que você pode afirmar sobre

$$\left\| f(x) - \left[\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2\pi n x) \right] \right\| ?$$

Note que $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Nesta base, essa quantidade é mínima.

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 06 Out 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 ANULADA!!! Todos os alunos ganharam 25.

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Sendo $H(x)$ a função de Heaviside, calcule

$$I(x,a) = \int_{0_-}^{x} H(\xi - a)\xi \,\mathrm{sen}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad 0 < a < \infty, \qquad 0 < x < \infty.$$

Seu resultado deve envolver uma única expressão usando $H(x-a)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
a > x &\Rightarrow I(x,a) = 0;\\
0 < a < x &\Rightarrow\\
I(x,a) &= \int_a^x \xi \,\mathrm{sen}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \mathrm{sen}(x) - x\cos(x) - \mathrm{sen}(a) + a\cos(a).
\end{aligned}$$

Juntando tudo,

$$I(x,a) = H(x-a)\left[\mathrm{sen}(x) - x\cos(x) - \mathrm{sen}(a) + a\cos(a)\right] \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Para $a > 0$, e sendo $H(x)$ a função de Heaviside, calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = H(|x| - a)(1 - |x|/a).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O enunciado estava com erro de tipografia! Deveria ter sido: calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = H(a - |x|)(1 - |x|/a).$$

Todos os alunos ganharam a questão integralmente.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(a-|x|)\left[1 - \frac{|x|}{a}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\left[1 - \frac{|x|}{a}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a}\left[1 - \frac{x}{a}\right]\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi a k^2}\left[1 - \cos(ak)\right] \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{t}{T^2} y = \frac{af(t)}{T},$$

onde as dimensões físicas das variáveis são $[\![y]\!] = [\![f]\!]$, e $[\![T]\!] = [\![t]\!]$,

a) [5] Quem é $[\![a]\!]$?

b) [20] Obtenha a função de Green $G(t,\tau)$ da equação diferencial.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Compare o primeiro termo do lado esquerdo com o lado direito:

$$\frac{[\![y]\!]}{[\![t]\!]} = [\![a]\!] \frac{[\![f]\!]}{[\![T]\!]} \Rightarrow [\![a]\!] = 1 \blacksquare$$

b) Como sempre:

$$\begin{aligned} G(t,\tau)\frac{dy}{d\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} y(\tau) &= \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}, \\ \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{dy}{d\tau}\, d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} y(\tau)\, d\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\, d\tau, \\ G(t,\tau)y(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} y(\tau)\frac{dG(t,\tau)}{d\tau}\, d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} y(\tau)\, d\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\, d\tau. \end{aligned}$$

Imponho

$$\lim_{\tau\to\infty} G(t,\tau)y(\tau) = 0$$

e rearranjo os termos restantes:

$$-G(t,0)y(0) + \int_{\tau=0}^{\infty} y(\tau)\left[-\frac{dG}{d\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\right] d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\, d\tau.$$

O problema torna-se

$$-\frac{dG}{d\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} = \delta(\tau - t), \qquad G(t,\infty) = 0.$$

Primeiro, procuro uma solução do problema homogêneo:

$$\begin{aligned} -\frac{dh}{d\tau} + h(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} &= 0, \\ \frac{dh}{d\tau} &= \frac{h\tau}{T^2}, \\ \frac{dh}{h} &= \frac{\tau d\tau}{T^2}, \\ \ln\frac{h(t,\tau)}{h(t,0)} &= \frac{\tau^2}{2T^2}, \\ h(t,\tau) &= h(t,0)\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right]. \end{aligned}$$

Agora procuro a solução para G pelo método de variação de parâmetros:

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= A(t,\tau)\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] \Rightarrow \\ -\frac{dG(t,\tau)}{d\tau} &= -\frac{dA(t,\tau)}{d\tau}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] - A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] \Rightarrow \\ -\frac{dA(t,\tau)}{d\tau}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] - A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] &+ A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] = \delta(\tau - t) \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Simplificando:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A(t,\xi)}{\mathrm{d}\xi} &= -\exp\left[-\frac{\xi^2}{2T^2}\right]\delta(\xi - t);\\
A(t,\tau) - A(t,0) &= \int_{\xi=0}^{\tau} -\exp\left[-\frac{\xi^2}{2T^2}\right]\delta(\xi - t)\,d\xi;\\
A(t,\tau) &= A(t,0) - H(\tau - t)\exp\left[-\frac{t^2}{2T^2}\right];\\
G(t,\tau) &= \exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right]\left[A(t,0) - H(\tau - t)\exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Para que $G(t,\infty) = 0$, é necessário que

$$
A(t,0) = \exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right).
$$

Finalmente,

$$
G(t,\tau) = [1 - H(\tau - t)]\exp\left(\frac{\tau^2 - t^2}{2T^2}\right) \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 08 Nov 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] [Greenberg, 1998, Ex. 17.7-8] Dado o problema de autovalor-autovetor

$$
\begin{aligned}
x^2y'' + xy' + \lambda y &= 0, \qquad (1 < x < a),\\
y(1) &= 0, \qquad y(a) = 0,
\end{aligned}
$$

ache seus autovalores e suas autofunções. **PARA ACELERAR A SOLUÇÃO, VOCÊ PODE USAR OS SEGUINTES FATOS SEM PRECISAR DEDUZI-LOS:**

- Os autovalores são positivos, e do tipo $\lambda = k^2$, onde k é um número positivo a determinar.
- As soluções correspondentes são do tipo

$$
y(x) = C\cos(k\ln(x)) + D\,\mathrm{sen}(k\ln(x)).
$$

Cabe a você agora determinar os k's (e portanto os λ's) possíveis, e os C's e D's correspondentes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Esta é uma equação de Euler. Tente

$$
\begin{aligned}
y &= x^r,\\
y' &= rx^{r-1},\\
y'' &= (r-1)rx^{r-2}
\end{aligned}
$$

e substitua:

$$
\begin{aligned}
(r-1)rx^r + rx^r + \lambda x^r &= 0,\\
r^2 - r + r + \lambda &= 0,\\
r^2 &= -\lambda.
\end{aligned}
$$

Os 3 casos possíveis são: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.
Se $\lambda = -k^2 < 0$,

$$
\begin{aligned}
r^2 &= k^2,\\
y(x) &= Ax^k + Bx^{-k}.
\end{aligned}
$$

O sistema de equações que impõe as condições de contorno é

$$
\begin{aligned}
A + B &= 0,\\
Aa^k + Ba^{-k} &= 0,\\
B &= -A;\\
A(a^k + a^{-k}) &= 0;\\
y &= a^k;\\
y + 1/y &= 0;\\
y^2 + 1 &= 0;\\
y &= \pm \mathrm{i};\\
a^k &= \pm \mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

Claramente, o caso $\lambda < 0$ leva a valores complexos de a, o que não é possível (a é um valor previamente definido, e real). Portanto, este caso não nos serve.
Se $\lambda = 0$,

$$
\begin{aligned}
r &= 0,\\
y(x) &= C.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Para que $y(1) = y(a) = 0$, devemos ter $C = 0$, o que torna a função identicamente nula, e impede que ela seja uma autofunção.
Se $\lambda = k^2 > 0$,

$$
\begin{aligned}
r^2 &= -k^2, \\
r &= \pm k\mathrm{i}, \\
y(x) &= Ax^{k\mathrm{i}} + Bx^{-k\mathrm{i}} \\
&= A\exp(k\mathrm{i}\ln(x)) + B\exp(-k\mathrm{i}\ln(x)) \\
&= A\left[\cos(k\ln(x)) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k\ln(x))\right] + B\left[\cos(k\ln(x)) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k\ln(x))\right].
\end{aligned}
$$

O truque padrão para encontrar $y(x)$ puramente real é fazer com que A e B sejam constantes complexas conjugadas. Façamos

$$
\begin{aligned}
A &= (C - \mathrm{i}D)/2, \\
B &= (C + \mathrm{i}D)/2,
\end{aligned}
$$

e substituamos:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= (C - \mathrm{i}D)\left[\cos(k\ln(x)) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k\ln(x))\right]/2 + (C + \mathrm{i}D)\left[\cos(k\ln(x)) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k\ln(x))\right]/2 \\
&= C\cos(k\ln(x)) + D\,\mathrm{sen}(k\ln(x)).
\end{aligned}
$$

Mas

$$
y(1) = 0 \Rightarrow C\cos(0) = 0 \Rightarrow C = 0.
$$

Portanto, as funções possíveis são do tipo

$$
Y = \mathrm{sen}(k\ln(x)),
$$

e ainda precisamos atender à condição de contorno

$$
y(a) = 0.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(k\ln(a)) &= 0, \\
k_n\ln(a) &= n\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots \\
k_n &= \frac{n\pi}{\ln(a)}, \\
\lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{(\ln(a))^2}, \\
y_n(x) &= \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln(a)}\ln(x)\right) \\
&= \mathrm{sen}\left(n\pi\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Utilizando o método das características, resolva

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u(x,0) = f(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Sejam

$$\begin{aligned} x &= X(s), \\ t &= T(s); \Rightarrow \\ u(x,t) &= u(X(s),T(s)) = U(s). \end{aligned}$$

mas

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dT}{ds}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dX}{ds}\frac{\partial u}{\partial x};$$

compare com

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0:$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= 1, \\ \frac{dX}{ds} &= X, \\ \frac{dU}{ds} &= 0. \end{aligned}$$

As soluções para T e X são

$$\begin{aligned} T(s) &= T(0) + s, \\ X(s) &= X(0)e^{s}. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, faça $T(s) = s$; então a solução para $u(x,t)$ é

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(X(s),T(s)) \\ &= U(s) = U(0) = f(X(0)) \\ &= f(X(s)e^{-s}) = f(xe^{-t}) \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] O aluno de Engenharia Ambiental Guido Ambi tentou aplicar o método de separação de variáveis à equação de Boussinesq em coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rh\frac{\partial h}{\partial r}\right], \qquad 0 \le r \le b.$$

Guido foi bem-sucedido? Por quê?

NÃO SE PREOCUPE COM CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO. NÃO SE PREOCUPE EM RESOLVER AS EQUAÇÕES ORDINÁRIAS, SE VOCÊ AS ENCONTRAR. JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA TENTANDO, APENAS, SEPARAR A EQUAÇÃO.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
h(r,t) &= R(r)T(t),\\
\frac{\partial(RT)}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(RT)\frac{\partial(RT)}{\partial r}\right],\\
R\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 \frac{T^2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[rR\frac{\mathrm{d}(R)}{\mathrm{d}r}\right]\\
\frac{1}{\alpha^2 T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{Rr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[rR\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right] = c_1.
\end{aligned}$$

Guido foi, sim, bem-sucedido ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Utilizando o método de separação de variáveis, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \qquad 0 \le x \le L,\\
\phi(x,0) &= f(x),\\
\phi(0,t) &= 0,\\
\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $\phi(x,t) = X(x)T(t)$;

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial (XT)}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 (XT)}{\partial x^2};\\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 T \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2};\\
\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda;\\
\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - \lambda X &= 0.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno são

$$
\begin{aligned}
X(0)T(t) &= 0,\\
X'(L)T(t) &= 0; \Rightarrow\\
X(0) &= 0,\\
X'(L) &= 0.
\end{aligned}
$$

Este é um problema de Sturm-Liouville com $w(x) = 1$.
As tentativas $\lambda > 0$ e $\lambda = 0$ falham. Faça $\lambda = -k^2 < 0$, onde k é uma constante positiva e real. A equação em $X(x)$ fica

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + k^2 X &= 0,\\
X(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx).\\
X(0) &= 0 \Rightarrow A = 0.\\
X(x) &= B\,\mathrm{sen}(kx),\\
X'(x) &= kB\cos(kx).\\
X'(L) &= kB\cos(kL) = 0 \Rightarrow\\
kL &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} + n\pi, & n = 0,1,2,\ldots\\ \frac{\pi}{2} - n\pi, & n = 1,2,3,\ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Temos que escolher entre as duas expressões acima para kL. Temos que começar a segunda em $n = 1$; caso contrário, teremos dois autovalores iguais ($[+\pi/2]^2$ e $[-\pi/2]^2$) para duas autofunções linearmente dependentes: $\mathrm{sen}(\pi x/(2L))$ e $\mathrm{sen}(-\pi x/(2L))$. Escolhemos portanto k_n's exclusivamente positivos, e temos

$$
\begin{aligned}
k_n &= \frac{\pi}{2L}(2n+1), \qquad n = 0,1,2,\ldots;\\
X_n(x) &= \mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right).
\end{aligned}
$$

A equação em $T(t)$ e sua solução são

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -\left[\frac{\pi(2n+1)}{2L}\right]^2,\\
T(t) &= T_0 \mathrm{e}^{-\left[\frac{\pi(2n+1)\alpha}{2L}\right]^2 t}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

A solução portanto é do tipo

$$
\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\left[\frac{\pi(2n+1)\alpha}{2L}\right]^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right);\\
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right);\\
f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right);\\
\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x;
\end{aligned}
$$

O único termo que sobrevive do lado direito é quando $n = m$; neste caso, a integral correspondente vale $L/2$ e temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x &= A_m \frac{L}{2}\\
A_m &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 01 Dez 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Nesta questão, todas as funções são reais e definidas no intervalo real $[0, 1]$. O produto interno entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

A figura ao lado mostra 3 funções reais: $u(x)$, $h_1(x)$ e $h_2(x)$.

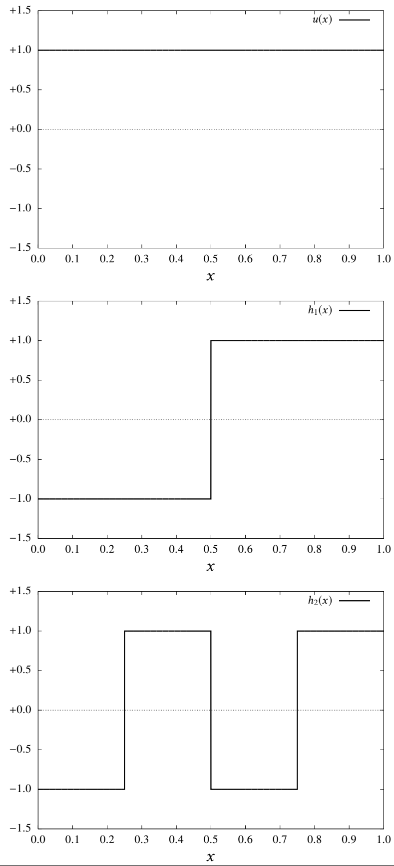
a) [05] Calcule $\|u(x)\|$, $\|h_1(x)\|$ e $\|h_2(x)\|$.

b) [10] $h_1(x)$ e $h_2(x)$ são ortonormais?

c) [10]É possível aproximar $u(x)$ por mínimos quadrados, **de forma razoável**, escrevendo

$$u(x) \approx a_1h_1(x) + a_2h_2(x)$$

e calculando a_1 e a_2? **Sugestão:** Calcule a_1 e a_2, e discuta o que você encontrou.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\|u(x)\| = \int_0^1 |u(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1,$$
$$\|h_1(x)\| = \int_0^{1/2} |-1|^2\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 |1|^2\,\mathrm{d}x = 1,$$
$$\|h_2(x)\| = \int_0^{1/4} |-1|^2\,\mathrm{d}x + \int_{1/4}^{1/2} |1|^2\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{3/4} |-1|^2\,\mathrm{d}x + \int_{3/4}^{1} |1|^2\,\mathrm{d}x = 1.$$

b)

$$\begin{aligned}\langle h_1(x), h_2(x)\rangle &= \int_0^{1/4}(-1\times -1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/4}^{1/2}(-1\times 1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{3/4}(1\times -1)\,\mathrm{d}x + \int_{3/4}^{1}(1\times 1)\,\mathrm{d}x\\ &= 1/4 - 1/4 - 1/4 + 1/4 = 0.\end{aligned}$$

Sim, pois elas são ortogonais e $\|h_1(x)\| = \|h_2(x)\| = 1$.
c)

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Se for possível projetar $u(x)$ sobre $h_1(x)$ e $h_2(x)$, devemos ter:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \langle h_1(x), u(x) \rangle = \int_0^1 h_1(x) u(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} (-1 \times 1)\, \mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 (1 \times 1) = 0; \\
a_2 &= \langle h_2(x), u(x) \rangle = \int_0^{1/4} (-1 \times 1)\, \mathrm{d}x + \int_{1/4}^{1/2} (1 \times 1)\, \mathrm{d}x + \int_{1/2}^{3/4} (-1 \times 1)\, \mathrm{d}x + \int_{3/4}^1 (1 \times 1) \\
&= -1/4 + 1/4 - 1/4 + 1/4 = 0.
\end{aligned}
$$

Não é possível projetar $u(x)$ sobre $h_1(x)$ e $h_2(x)$, porque $u(x)$ é perpendicular a ambas ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Obtenha os coeficientes c_n da **série de Fourier <u>complexa</u>** de

$$f(x) = 4(x - 1/2)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x}. \qquad 0 \le x \le 1.$$

Observação: você pode usar os seguintes fatos:

$$\int_0^1 x^2 e^{-2\pi i n x}\, dx = \frac{1 + i\pi n}{2\pi^2 n^2},$$
$$\int_0^1 x e^{-2\pi i n x}\, dx = \frac{i}{2\pi n}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^1 4(x - 1/2)^2 e^{-2\pi i n x}\, dx \\
&= \int_0^1 \left[4(x^2 - x + 1/4)e^{-2\pi i n x}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[(4x^2 - 4x + 1)e^{-2\pi i n x}\right] dx \\
&= 4\frac{1 + i\pi n}{2\pi^2 n^2} - 4\frac{i}{2\pi n} \\
&= \frac{4(1 + i\pi n) - 4i(\pi n)}{2\pi^2 n^2} \\
&= \frac{4}{2\pi^2 n^2} = \frac{2}{\pi^2 n^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Calcule a convolução de Fourier entre

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(x),\\
g(x) &= \frac{1}{2}[H(x+1) - H(x-1)],
\end{aligned}
$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
[f * g](x) &= \int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} \operatorname{sen}(x-\xi) g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{1}{2}\int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{1}{2}[\cos(x-1) - \cos(x+1)] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Dada a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + f(x), \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t \ge 0, \qquad \phi(x,0) = 0,$$
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases},$$

obtenha $\widehat{\phi}(k,t)$, a transformada de Fourier de $\phi(x,t)$ em x. **Sugestão:** calcule a transformada de Fourier da equação diferencial parcial, e prossiga até o amargo fim.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A transformada de Fourier de $f(x)$ é

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}.\end{aligned}$$

Agora transforme a condição inicial:

$$\widehat{\phi}(k,t) = \mathscr{F}\left\{\phi(x,0)\right\} = 0.$$

E em seguida transforme a equação:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\mathrm{d}t} &= D(\mathrm{i}k)^2\widehat{\phi} + \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k} \\ \frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\mathrm{d}t} + Dk^2\widehat{\phi} &= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}, \qquad \widehat{\phi}(k,0) = 0.\end{aligned}$$

Agora $\widehat{\phi} = uv$; $\quad\Rightarrow$

$$\begin{aligned}u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Dk^2uv &= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k} \\ u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + vDk^2\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}.\end{aligned}$$

Anule o colchete:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -vDk^2, \\ \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -Dk^2\mathrm{d}t \\ \int_{v(k,0)}^{v(k,t)} \frac{\mathrm{d}v'}{v'} &= \int_0^t \left(-Dk^2\right)\mathrm{d}\tau \\ \ln\frac{v(k,t)}{v(k,0)} &= -Dk^2t, \\ v(k,t) &= v(k,0)\exp\left(-Dk^2t\right).\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

De volta à EDO,

$$
\begin{aligned}
v(k,0)\exp\left(-Dk^2t\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{v(k,0)}\exp(Dk^2t)\frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{v(k,0)}\frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\exp(Dk^2t)\mathrm{d}t\\
u(k,t)-u(k,0) &= \frac{1}{v(k,0)Dk^2}\frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\left[\exp(Dk^2t)-1\right]\\
u(k,t) &= u(k,0)+\frac{1}{v(k,0)Dk^2}\frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\left[\exp(Dk^2t)-1\right]\\
u(k,t)v(k,t) &= \left\{u(k,0)+\frac{1}{v(k,0)Dk^2}\frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\left[\exp(Dk^2t)-1\right]\right\}v(k,0)\exp\left(-Dk^2t\right)\\
\widehat{\phi}(k,t) &= \widehat{\phi}(k,0)\exp\left(-Dk^2t\right)+\left\{\frac{1}{Dk^2}\frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\left[\exp(Dk^2t)-1\right]\right\}\exp\left(-Dk^2t\right).
\end{aligned}
$$

Mas $\widehat{\phi}(k,0)=0$, donde

$$
\widehat{\phi}(k,t) = \frac{1}{Dk^2}\frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\left[1-\exp(-Dk^2t)\right] \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 11 Dez 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Se

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2},$$

obtenha a série de Fourier trigonométrica de $f_P(x)$, onde $f_P(x)$ é a extensão par de $f(x)$ entre $-\pi/2$ e $+\pi/2$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
L &= \pi;\\
f_P(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{\pi}\right);\\
A_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f_P(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f_P(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{4}{\pi(4n^2-1)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Dada a EDO

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{T_1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T_0^2}y = \frac{1}{T_0^2}x,$$

onde todas as quantidades são reais, com T_0 e T_1 constantes, e sendo

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

a transformada de Fourier de uma $f(t)$ genérica, obtenha $\widehat{y}(\omega)$ em função de $\widehat{x}(\omega)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{i}\omega)^2\widehat{y} + \frac{\mathrm{i}\omega}{T_1}\widehat{y} + \frac{1}{T_0^2}\widehat{y} &= \frac{1}{T_0^2}\widehat{x};\\
\left[-\omega^2 + \frac{\mathrm{i}\omega}{T_1} + \frac{1}{T_0^2}\right]\widehat{y} &= \frac{1}{T_0^2}\widehat{x};\\
\frac{\left[-\omega^2 T_1 T_0^2 + \mathrm{i}\omega T_0^2 + T_1\right]}{T_1 T_0^2}\widehat{y} &= \frac{T_1}{T_1 T_0^2}\widehat{x};\\
\widehat{y} &= \frac{T_1}{\left[-\omega^2 T_1 T_0^2 + \mathrm{i}\omega T_0^2 + T_1\right]}\widehat{x} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] (Bird, Stewart e Lightfoot, Transport Phenomena, Ex. 11.2-2) Dada a EDP e condições inicial e de contorno

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right),\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= 1,\\
\phi(\infty,t) &= 0,
\end{aligned}
$$

obtenha uma EDO equivalente para $f(\xi)$ e suas condições de contorno $f(0)$ e $f(\infty)$, onde $\phi(x,t) = f(\xi)$, e

$$
\xi = \frac{x}{\sqrt[3]{9t}}
$$

é uma variável de similaridade.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se $\phi(x,t) = f(\xi)$, então calculamos as derivadas parciais de ξ em relação a x e t para tê-las à mão:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[x(9t)^{-1/3}\right]\\
&= x\left[-\frac{1}{3}(9t)^{-4/3}9\right]\\
&= x\left[-3(9t)^{-4/3}\right]\\
&= -3x(9t)^{-1/3}(9t)^{-1}\\
&= -3\xi(9t)^{-1}\\
&= \frac{-\xi}{3t}.
\end{aligned}
$$

Agora em x:

$$
\frac{\partial \xi}{\partial x} = (9t)^{-1/3}.
$$

Substituímos agora na EDP:

$$
\begin{aligned}
f(\xi) = \phi(x,t) &\;\Rightarrow\\
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}\\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{-\xi}{3t}\right)\\
&= -\frac{1}{3t}\xi\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}.
\end{aligned}
$$

Em x:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}(9t)^{-1/3};\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) &= \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{1}{x^2}\\
&= \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}(9t)^{-1/3}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}(9t)^{-1/3};\\
&= \frac{(9t)^{-1/3}}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right]\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}(9t)^{-1/3};\\
&= \frac{(9t)^{-2/3}}{x}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{(9t)^{-1/3}}{x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Juntando tudo:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{3t}\xi\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{(9t)^{-2/3}}{x}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{(9t)^{-1/3}}{x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi},\\
-\frac{3}{(9t)}\xi\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{(9t)^{-2/3}}{x}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{(9t)^{-1/3}}{x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi},\\
-3\xi\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{(9t)^{1/3}}{x}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{(9t)^{2/3}}{x^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\\
-3\xi\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\\
-3\xi^3\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} &= \xi\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\\
\xi\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2} + (3\xi^3 - 1)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} &= 0,
\end{aligned}
$$

com condições de contorno

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1,\\
f(\infty) &= 0 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Obtenha a função de Green de

$$
\begin{aligned}
x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \left[1 + x^2\right] y(x) &= f(x),\\
y(1) &= y_1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\xi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - \left[1+\xi^2\right] y(\xi) &= f(\xi)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - \frac{1}{\xi}\left[1+\xi^2\right] y(\xi) &= \frac{1}{\xi} f(\xi)\\
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left[1+\xi^2\right] y(\xi) &= \frac{G(x,\xi)}{\xi} f(\xi)\\
\int_{\xi=1}^{\infty} G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_{\xi=1}^{\infty}\frac{G(x,\xi)}{\xi}\left[1+\xi^2\right] y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_1^{\infty}\frac{G(x,\xi)}{\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\bigg|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} y(\xi)\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_{\xi=1}^{\infty}\frac{G(x,\xi)}{\xi}\left[1+\xi^2\right] y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_1^{\infty}\frac{G(x,\xi)}{\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

Faça $G(x,\infty) = 0$;

$$
\begin{aligned}
-G(x,1)y(1) - \int_1^{\infty} y(\xi)\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_{\xi=1}^{\infty}\frac{G(x,\xi)}{\xi}\left[1+\xi^2\right] y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_1^{\infty}\frac{G(x,\xi)}{\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
-G(x,1)y(1) - \int_1^{\infty}\left\{\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left[1+\xi^2\right]\right\} y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_1^{\infty}\frac{G(x,\xi)}{\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

A função de Green é a solução de

$$
-\left[\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left[1+\xi^2\right]\right] = \delta(\xi - x).
$$

Tentemos $G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi)$;

$$
\begin{aligned}
-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} - \frac{uv}{\xi}\left[1+\xi^2\right] &= \delta(\xi - x);\\
u\left\{-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} - \frac{v}{\xi}\left[1+\xi^2\right]\right\} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + \frac{v}{\xi}\left[1+\xi^2\right] &= 0\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} + \xi\right);\\
\int_{v(x,1)}^{v(x,\xi)}\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\int_1^{\xi}\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} - \int_1^{\xi}\eta\,\mathrm{d}\eta;\\
\ln\left(\frac{v(x,\xi)}{v(x,1)}\right) &= -\ln(\xi) + \frac{1}{2}[1-\xi^2]\\
v(x,\xi) &= \frac{v(x,1)}{\xi}\exp\left[\frac{1}{2}(1-\xi^2)\right].
\end{aligned}
$$

Prosseguimos:

$$
\begin{aligned}
-\frac{v(x,1)}{\xi}\exp\left[\frac{1}{2}(1-\xi^2)\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x)\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{\xi}{v(x,1)}\exp\left[\frac{1}{2}(\xi^2-1)\right]\delta(\xi - x)\\
u(x,\xi) - u(x,1) &= -\int_{\eta=1}^{\xi}\frac{\eta}{v(x,1)}\exp\left[\frac{1}{2}(\eta^2-1)\right]\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta\\
u(x,\xi) &= u(x,1) - \frac{x}{v(x,1)}\exp\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\right]H(\xi - x).
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Agora,

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= u(x,\xi)v(x,\xi) \\
&= \left\{u(x,1) - \frac{x}{v(x,1)}\exp\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\right]H(\xi-x)\right\}\left\{\frac{v(x,1)}{\xi}\exp\left[\frac{1}{2}(1-\xi^2)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\xi}\exp\left[\frac{1}{2}(1-\xi^2)\right]\left\{G(x,1) - x\exp\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\right]H(\xi-x)\right\}.
\end{aligned}
$$

Para que $G(x,\infty) = 0$, devemos ter

$$
G(x,1) = x\exp\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\right].
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= \frac{1}{\xi}\exp\left[\frac{1}{2}(1-\xi^2)\right]x\exp\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\right](1-H(\xi-x)) \\
&= \frac{x}{\xi}\exp\left[\frac{1}{2}(x^2-\xi^2)\right][1-H(\xi-x)] \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$