TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 1 Abr 2016
Prof. Nelson Luís Dias

| 0 |
|---|

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

---

**1** [25] Uma lata de óleo de raio de base $R$ e altura $H$ tem um furo no fundo, de raio $r$. As razões $r/R$ e $R/H$ são fixas, de modo que basta uma dessas variáveis na análise do problema (vamos usar $H$). O óleo tem viscosidade cinemática $\nu$ ($[\![\nu]\!] = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$). Se o tempo de drenagem do óleo da lata é $T_d$, e considerando que (obviamente) a aceleração da gravidade $g$ é importante, obtenha os 2 parâmetros adimensionais que governam o problema. As variáveis *comuns* aos dois parâmetros devem ser, **obrigatoriamente**, $H$ e $g$.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As duas dimensões fundamentais deste problema são $\mathsf{L}$ e $\mathsf{T}$. Teremos 2 parâmetros adimensionais:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= H^a g^b \nu,\\
\Pi_2 &= H^a g^b T_d.
\end{aligned}
$$

A primeira equação gera o sistema:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{L}^{\mathsf{a}}(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2})^{\mathsf{b}}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1} &\Rightarrow\\
a + b + 2 &= 0,\\
-2b - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Então,

$$
b = -1/2, \qquad a = -3/2.
$$

donde

$$
\Pi_1 = H^{-3/2} g^{-1/2} \nu = \frac{\nu}{H\sqrt{gH}}.
$$

A segunda equação gera o sistema:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{L}^{\mathsf{a}}(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2})^{\mathsf{b}}\mathsf{T} &\Rightarrow\\
a + b &= 0,\\
-2b + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Então,

$$
b = 1/2; \qquad a = -1/2.
$$

donde

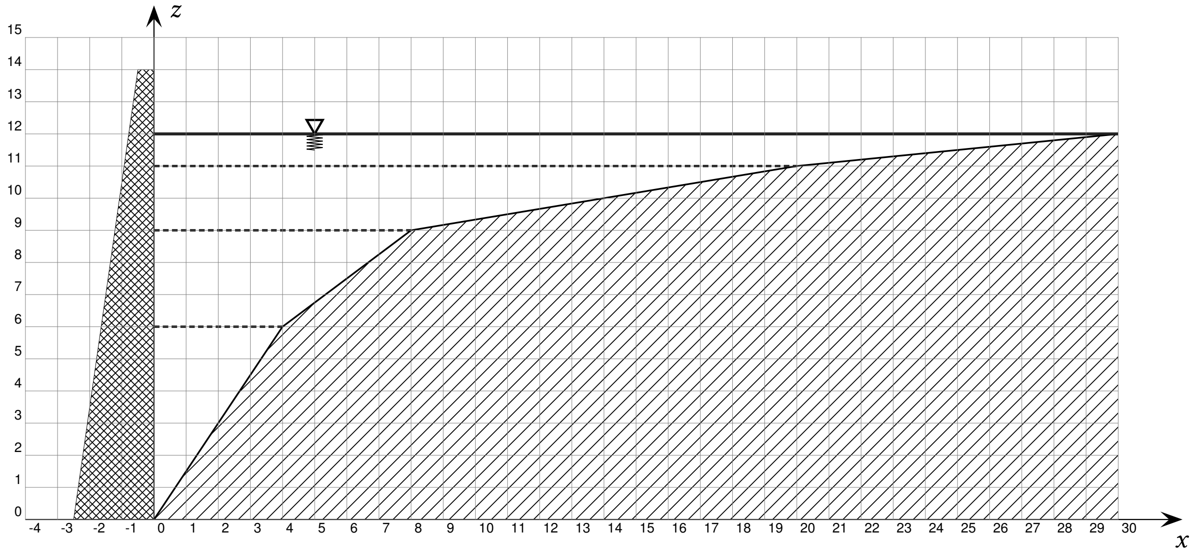
$$
\Pi_2 = T_d\sqrt{\frac{g}{H}}.
$$

Temos agora a previsão de análise dimensional para um viscosímetro elementar:

$$
\nu = H\sqrt{gH} f\left(T_d\sqrt{\frac{g}{H}}\right) \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

**2** [25] A figura abaixo mostra o perfil do lago de um reservatório de abastecimento de água. As cotas, medidas na vertical, estão em m. As distâncias horizontais estão em hm (100 m). A região hachuriada é solo, enquanto que a região branca é água. A profundidade máxima do lago é de 12 m. Suponha por simplicidade que o reservatório tem uma largura constante (na direção $y$) e igual a 100 m. Determine, por integração numérica, o volume total do reservatório em $m^3$.




---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Basta aplicar a regra do trapézio aos elementos delimitados pelas linhas tracejadas:

$$V = 100 \times 100 \times \frac{1}{2} \times [4 \times 6 + (4+8) \times 3 + (8+20) \times 2 + (20+30) \times 1] = 830000\,\mathrm{m}^3.$$

Continue a solução no verso ⟹

**3** [25] A série de $\exp(x)$ é

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{B_n},$$

com $A_n = x^n$ e $B_n = n!$. Qual é a relação de recursão entre $A_n$ e $A_{n-1}$, e entre $B_n$ e $B_{n-1}$?

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$A_n = x^n = n \times x^{n-1} = xA_{n-1};$$
$$B_n = n! = n \times (n-1)! = nB_{n-1} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

**4** [25] Sendo $\delta_{ij}$ o delta de Kronecker, e $\epsilon_{ijk}$ o símbolo de permutação, calcule o valor numérico de

$$\delta_{ii}\left(\epsilon_{lmn}\delta_{l1}\delta_{m2}\delta_{n3}\right).$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\delta_{ii}\left(\epsilon_{lmn}\delta_{l1}\delta_{m2}\delta_{n3}\right) = (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) \times (\epsilon_{123}) = 3 \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 29 Abr 2016
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ________________

---

**1** [25] A matriz

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de rotação? Por quê? **Sugestão:** Para $[\boldsymbol{u}] = [1, 1]^\top$ e $[\boldsymbol{v}] = [1, -1]^\top$, Calcule $[C][\boldsymbol{u}]$ e $[C][\boldsymbol{v}]$: o resultado parece uma rotação para você?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Temos

$$[C][\boldsymbol{u}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top = [\boldsymbol{u}],$$
$$[C][\boldsymbol{v}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^\top = -[\boldsymbol{v}].$$

Claramente, não se trata de uma rotação: enquanto que $\boldsymbol{u}$ "não sai do lugar", $\boldsymbol{v}$ é rebatido em torno da reta $y = x$.

Continue a solução no verso ⟹

**2** [25] Obtenha a solução geral do sistema de equações diferenciais acopladas

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 4y,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O sistema tem a forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A matriz do sistema possui 2 autovalores, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, e dois autovetores associados, $\boldsymbol{v}_1 = (2,1)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (-2,1)$. Se $(u, v)$ são as componentes da solução na base dos autovetores, teremos duas equações desacopladas:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 3u \Rightarrow u(t) = \alpha \mathrm{e}^{3t}$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -1v \Rightarrow v(t) = \beta \mathrm{e}^{-t}.$$

Na base canônica a solução será

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

**3** [25] Se

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^{3t} (x^2 t)\,\mathrm{d}x,$$

Obtenha $I(t)$ de forma explícita.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Trata-se de uma aplicação direta da Regra de Leibnitz:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}t &= f(b,t)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - f(a,t)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x;\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^{3t} (x^2 t)\,\mathrm{d}x &= 9t^3 \times 3 - t^3 \times 1 + \int_t^{3t} x^2\,\mathrm{d}x,\\
&= 26t^3 + \frac{1}{3}\left[27t^3 - t^3\right]\\
&= \frac{104}{3}t^3 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

**4** [25] Um campo de velocidade uniforme $\boldsymbol{v} = (1,0,0)\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ atravessa a superfície $\mathscr{S}$:

$$x = \sqrt{1-y^2}, \qquad -1 \le y \le 1, \qquad 0 \le z \le 1\ \mathrm{m}.$$

Calcule a vazão total

$$Q = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A parametrização óbvia mais uma vez é

$$\begin{aligned} x &= (1-u^2)^{1/2} \\ y &= u, \\ z &= v. \end{aligned}$$

Então,

$$Q = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A = \iint_{R_{uv}} \boldsymbol{v}\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (-u(1-u^2)^{-1/2}, 1, 0), \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0,0,1), \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (u(1-u^2)^{-1/2}, 1, 0)\times(0,0,1) = \left(1, \frac{u}{(1-u^2)^{1/2}}, 0\right); \\ \boldsymbol{v}\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] &= 1; \\ Q &= \int_{u=-1}^{1}\int_{v=0}^{1} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2\ \mathrm{m^3\,s^{-1}} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 03 Jun 2016
Prof. Nelson Luís Dias

0

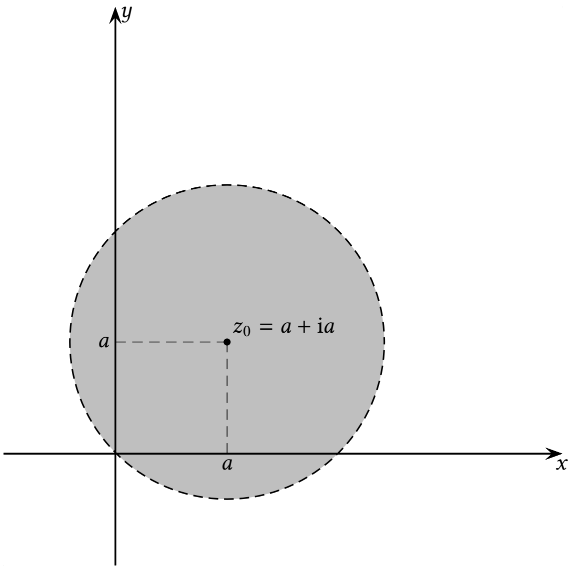
NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

**1** [25] Para a região hachuriada do plano complexo mostrada na figura ao lado, obtenha a série de Laurent em torno de $z_0 = a + \mathrm{i}a$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) de

$$f(z) = \frac{z_0}{z}.$$

Deixe o resultado final em função de $z - z_0$ e de $z_0$ (ou seja: **não** substitua $z_0 = a + \mathrm{i}a$).
Sugestão: reescreva $z - z_0 + z_0$ no denominador.




---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Observe que em qualquer ponto do disco cinza,

$$|z - z_0| < |z_0| \Rightarrow \left|\frac{z - z_0}{z_0}\right| < 1.$$

Agora,

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{z_0}{z} &= \frac{z_0}{z - z_0 + z_0} \\ &= \frac{z_0}{z_0}\left[\frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

**2** [25] Calcule a transformada de Laplace de

$$f(t) = \mathrm{e}^t \cosh(t).$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\mathrm{e}^t \cosh(t)\} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^t \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{2t} + 1\right]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{2t}\} + \mathscr{L}\{1\}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s}\right] \\
&= \frac{s-1}{s^2-2s} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

**3** [50] Utilizando o método de Frobenius, obtenha duas soluções LI de

$$x^2y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Inicialmente, verificamos se $x = 0$ é um ponto singular regular. Reescrevemos a EDO em forma normal:

$$y'' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)y = 0$$

e verificamos

$$\begin{aligned} xp(x) &= (x-1), \\ x^2q(x) &= 1-x, \end{aligned}$$

e de fato o ponto é singular regular. Fazemos então

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}, \end{aligned}$$

É sempre preferível substituir essas expressões na forma “não-normal”!

$$x^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}\right] + x(x-1)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}\right] + (1-x)\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right] = 0.$$

Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Reunindo os expoentes de $x$ em comum, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1\right]a_n\right\}x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+r) - 1\right]a_n\right\}x^{n+r+1} = 0.$$

É possível simplificar:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-2) + 1\right]a_n\right\}x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+r) - 1\right]a_n\right\}x^{n+r+1} = 0$$

Neste ponto, fazemos

$$\begin{aligned} n+r+1 &= m+r, \\ n+1 &= m, \\ n &= m-1 \end{aligned}$$

e substituímos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-2) + 1\right]a_n\right\}x^{n+r} + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[(m+r-1) - 1\right]a_{m-1}\right\}x^{m+r} = 0.$$

Renomeando agora $m = n$ no segundo somatório, e separando o caso $n = 0$, teremos:

$$\left[r(r-2) + 1\right]a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-2) + 1\right]a_n + \left[(n+r-2)\right]a_{n-1}\right\}x^{n+r} = 0.$$

Continue a solução no verso ⟹

A equação indicial é

$$\begin{aligned} r^2 - 2r + 1 &= 0, \\ (r-1)^2 &= 0, \\ r &= 1. \end{aligned}$$

A raiz é dupla. Uma solução é

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

Procuramos os $a_n$'s, a partir de $a_0 = 1$ (sem perda de generalidade, como sempre):

$$\begin{aligned} [(n+1)(n-1)+1]a_n + [(n-1)a_{n-1}] &= 0, \\ a_n &= -\frac{(n-1)}{(n+1)(n-1)+1}a_{n-1} \\ &= -\frac{n-1}{n^2}a_{n-1}. \end{aligned}$$

Partindo de $a_0 = 1$, teremos $a_1 = 0$, e a partir da equação acima, $a_n = 0$ para $n > 1$. A nossa primeira solução é simplesmente

$$y_1(x) = x.$$

De fato, $y_1' = 1$, e (substituindo na EDO)

$$x(x-1) + (1-x)x \equiv 0.$$

Precisamos agora de uma segunda solução, e o Teorema de Frobenius nos sugere

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}, \\ y_2'(x) &= x\frac{1}{x} + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^n, \\ y_2''(x) &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Então,

$$x^2\left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n-1}\right] + x(x-1)\left[x\frac{1}{x} + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^n\right] + (1-x)\left[x\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}\right] = 0.$$

Como se espera, todos os termos envolvendo $\ln x$ se cancelam. Prosseguindo,

$$x^2\left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n-1}\right] + x(x-1)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^n\right] + (1-x)\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}\right] = 0.$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned} \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n+1}\right] + \left[x(x-1) + x(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^n\right] + \left[(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}\right] &= 0; \\ x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+2} &= 0. \end{aligned}$$

Reunimos agora os termos nos mesmos expoentes de $x$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n(n+1) - (n+1) + 1\right]c_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1) - 1\right]c_n x^{n+2} = -x^2.$$

Simplificamos novamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n-1) + 1\right]c_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n^{n+2} = -x^2.$$

Continue a solução no verso ⟹

Parece bem evidente que devemos fazer

$$
\begin{aligned}
m+1 &= n+2,\\
m &= n+1,\\
n &= m-1.
\end{aligned}
$$

Obtemos:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n-1)+1\right]c_n x^{n+1} + \sum_{m=2}^{\infty}(m-1)c_{m-1}x^{m+1} = -x^2.
$$

Separamos o caso $n = 1$ (que corresponde ao expoente $x^2$!):

$$
c_1 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+1)(n-1)+1\right]c_n + \left[(n-1)\right]c_{n-1}\right\}x^{n+1} = -x^2.
$$

Isso nos dá, imediatamente,

$$
c_1 = -1.
$$

Prosseguindo,

$$
\begin{aligned}
[(n+1)(n-1)+1]c_n &= -(n-1)c_{n-1},\\
c_n &= -\frac{n-1}{(n+1)(n-1)+1}c_{n-1},\\
&= -\frac{n-1}{n^2-1+1}c_{n-1}\\
&= -\frac{n-1}{n^2}c_{n-1}\\
&= (-1)(-1)\frac{(n-1)(n-2)}{n^2(n-1)^2}c_{n-2}\\
&\vdots\\
&= [(-1)]^{n-1}\frac{(n-1)(n-1)\ldots 2\times 1}{[n(n-1)\ldots 2]^2}c_{-1}\\
&= (-1)^n\frac{(n-1)!}{[n!]^2}\\
&= (-1)^n\frac{(n-1)!}{[n\times(n-1)!][n!]}\\
&= (-1)^n\frac{1}{n\times n!}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
y_2(x) = x\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\times n!}x^{n+1} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 03 Jun 2016
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

**1** [25] Considere o programa em Python a seguir:

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
def f(x):
   return x
def trapezio (n ,a ,b , f ):
      '''
      trapezio (n ,a ,b , f ):   integra   f   entre   a   e   b   com   n   trapézios
      '''
      deltax = (b - a )/ n
      Se = f ( a ) + f ( b )              # define Se
      Si = 0.0                            # inicializa Si
      for k in range (1 , n ):            # calcula Si
          xk = a + k * deltax
          Si += f ( xk )
      I = Se + 2* Si                      # cálculo de I
      I *= deltax
      I /= 2
      return I
Inumer = trapezio(2,0.0,1.0,f)
Iexata = 0.5
print(abs(Inumer - Iexata))
```

Qual o valor que o programa imprime na tela?

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A função $f(x) = x$ é linear; para ela, a regra do trapézio é exata. O programa imprime 0.

Continue a solução no verso ⟹

**2** [25] Dados os vetores $\boldsymbol{u} = (1,2,3)$, $\boldsymbol{v} = (3,2,1)$ e $\boldsymbol{w} = (1,3,2)$, calcule $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = (28, 4, -20).$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

**3** [25] Calcule

$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$u(\xi) = H(\xi - a) \Rightarrow \mathrm{d}u = \delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi;$$
$$\mathrm{d}v(\xi) = \delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi \Rightarrow v(\xi) = H(\xi - a).$$

$$\int_{-\infty}^{x} \underbrace{H(\xi - a)}_{u}\,\underbrace{\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi}_{\mathrm{d}v} = H(\xi - a)H(\xi - a)\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi; \Rightarrow$$
$$2\int_{-\infty}^{x} \underbrace{H(\xi - a)}_{u}\,\underbrace{\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi}_{dv} = [H(x - a)]^2;$$
$$\int_{-\infty}^{x} \underbrace{H(\xi - a)}_{u}\,\underbrace{\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi}_{dv} = \frac{1}{2}\,[H(x - a)]^2 = \frac{1}{2}H(x - a) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

**4** [25] Obtenha uma expressão para a transformada de Laplace $\overline{y}(s)$ da solução da equação diferencial ordinária

$$y'' + 3y' - 4y = x^2 - \frac{x}{2}; \qquad y(0) = 1; \qquad y'(0) = 0.$$

Pode ser útil saber que

$$\mathscr{L}\left[x^2 - \frac{x}{2}\right] = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{2s^2}.$$

**ATENÇÃO: LEVE O CÁLCULO DE SUAS FRAÇÕES PARCIAIS ATÉ O FIM.**

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A transformada de Laplace da EDO produz

$$\begin{aligned}
s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0) + 3[s\overline{y} - y(0)] - 4\overline{y} &= \frac{2}{s^3} - \frac{1}{2s^2},\\
s^2\overline{y} - s + 3s\overline{y} - 3 - 4\overline{y} &= \frac{2}{s^3} - \frac{1}{2s^2},\\
(s^2 + 3s - 4)\overline{y} &= 3 + s + \frac{2}{s^3} - \frac{1}{2s^2},\\
(s^2 + 3s - 4)\overline{y} &= 3 + s + \frac{2}{s^3} - \frac{1}{2s^2}; \qquad \Rightarrow\\
\overline{y} &= \frac{2s^4 + 6s^3 - s + 4}{2s^3(s^2 + 3s - 4)}\\
&= \frac{17}{80(s+4)} - \frac{5}{16s} - \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{2s^3} + \frac{11}{10(s-1)} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 11 Jul 2016
Prof. Nelson Luís Dias

| 0 |
|---|

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

**1** [25] A Engenheira Ambiental Kanaliza Dôra está estudando escoamentos em canais cuja largura é muito maior que a profundidade. Kanaliza concluiu que as variáveis intervenientes no problema são: (a) a velocidade média $V$ do canal; (b) a profundidade média $h$; (c) a componente da aceleração da gravidade ao longo do canal $gS_0$, onde $g$ é a aceleração da gravidade e $S_0$ é a declividade do canal (**ATENÇÃO: KANALIZA E VOCÊ DEVEM USAR $gS_0$ COMO UMA ÚNICA VARIÁVEL**); e (d) o comprimento de rugosidade do fundo $z_0$. Obtenha os dois grupos adimensionais que descrevem o problema. **OBRIGATORIAMENTE, UM DELES DEVE CONTER (NO MÁXIMO) $V_0$, $gS_0$ E $h$, E O OUTRO DEVE CONTER (NO MÁXIMO) $z_0$, $gS_0$ E $h$.**

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Há quatro variáveis e apenas duas dimensões fundamentais (L e T), uma vez que nenhuma das 4 variáveis da lista envolve a massa.
Os parâmetros adimensionais são

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{V}{\sqrt{hgS_0}},\\
\Pi_2 &= \frac{z_0}{h} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

**2** [25] Sabendo que a vorticidade de um escoamento é

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u},$$

onde $\boldsymbol{u}$ é a velocidade do escoamento, obtenha $\epsilon_{ijk}\omega_k$ em função de

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

($\epsilon_{ijk}$ é o símbolo de permutação; $u_i$ é a $i$-ésima componente do vetor $\boldsymbol{u}$ na base canônica; e $\omega_k$ é a $k$-ésima componente do vetor $\boldsymbol{\omega}$ na base canônica) .

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \epsilon_{mnk}\frac{\partial u_n}{\partial x_m};\\
\epsilon_{ijk}\omega_k &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right)\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\\
&= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

**3** [25] Obtenha a solução geral de

$$xy' + y = x^2.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{x^2}{3}.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

**4** [25] Seja

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)^2(z-c)^3},$$

onde $a = (1 + \mathrm{i})$, $b = (1 - \mathrm{i})$ e $c = \mathrm{i}$. Obtenha o coeficiente $c_{-3}$ da série de Laurent de $f(z)$ em torno de $z = c$. **FAÇA AS CONTAS ATÉ O FIM. SUA RESPOSTA DEVE SER UM NÚMERO.**

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Próximo de $z = c$,

$$\begin{aligned}
f(z) &\sim \frac{1}{(c-a)(c-b)^2(z-c)^3} \Rightarrow \\
c_{-3} &= \frac{1}{(c-a)(c-b)^2} \\
&= \frac{1}{(\mathrm{i}-(1+\mathrm{i}))(\mathrm{i}-(1-\mathrm{i}))^2} \\
&= \frac{1}{(-1)(-1+2\mathrm{i})^2} \\
&= \frac{1}{(-1)(1-4\mathrm{i}-4)} \\
&= \frac{1}{(3+4\mathrm{i})} \\
&= \frac{(3-4\mathrm{i})}{25} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹