TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 28 Ago 2015
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Após receber as 3 diagnonais de um sistema tridiagonal nos vetores (*arrays*) `a`, `b` e `c`, e o vetor de forçantes `d`, a rotina `triad` abaixo ainda precisa alocar 3 vetores (*arrays*) localmente para poder funcionar. Quais são os seus nomes, e o que acontece com cada um deles quando `triad` termina?

```
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# alglin.py implementa uma solução de um sistema linear
# com matriz tridiagonal
# ----------------------------------------------------------
from sys import exit
from numpy import zeros
def triad(a,b,c,d):
   n = len(a);
   cc = zeros(n,float)
   dd = zeros(n,float)
   cc[0] = c[0]/b[0] ;
   for i in range(1,n-1):
      cc[i] = (c[i])/(b[i] - a[i]*cc[i-1])
   dd[0] = d[0]/b[0] ;
   for i in range(1,n):
      dd[i] = (d[i] - a[i]*dd[i-1])/(b[i] - a[i]*cc[i-1])
   x = zeros(n,float)
   x[n-1] = dd[n-1] ;
   for i in range (n-2,-1,-1):
      x[i] = dd[i] - cc[i]*x[i+1]
   return x
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

`cc`, `dd` e `x`. Os dois primeiros têm seus espaços de memória liberados quando a rotina termina. `x` retorna ao programa principal com a solução do sistema.

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] A partir das expansões em série de Taylor a seguir, onde $u_i^n \equiv u(x_i, t_n)$, e $x_i = i\Delta x$, obtenha uma aproximação para a derivada de ordem 4

$$\frac{\partial^4 u(x_i, t_n)}{\partial x^4}.$$

$$\begin{aligned}
u_{i+2}^n &= u_i^n + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i^n (2\Delta x) + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n (4\Delta x^2) + \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_i^n (8\Delta x)^3 + \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n (16\Delta x^4) + \left.\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right|_i^n (32\Delta x^5) + O(\Delta x^6)\\
u_{i+1}^n &= u_i^n + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i^n (\Delta x) + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n (\Delta x^2) + \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_i^n (\Delta x)^3 + \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n (\Delta x^4) + \left.\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right|_i^n (\Delta x^5) + O(\Delta x^6)\\
u_{i-1}^n &= u_i^n - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i^n (\Delta x) + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n (\Delta x^2) - \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_i^n (8\Delta x)^3 + \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n (\Delta x^4) - \left.\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right|_i^n (32\Delta x^5) + O(\Delta x^6)\\
u_{i-2}^n &= u_i^n - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i^n (2\Delta x) + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n (4\Delta x^2) - \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_i^n (8\Delta x)^3 + \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n (16\Delta x^4) - \left.\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right|_i^n (32\Delta x^5) + O(\Delta x^6)
\end{aligned}$$

Sugestão: some dois pares de equações (quais?), e resolva o sistema 2×2 resultante para as derivadas de ordem 2 e 4.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Somo as equações nos índices ± 1 e ± 2:

$$\begin{aligned}
u_{i+2}^n + u_{i-2}^n &= 2u_i^n + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n (8\Delta x^2) + \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n (32\Delta x^4) + O(\Delta x^6)\\
u_{i+1}^n + u_{i-1}^n &= 2u_i^n + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n (2\Delta x^2) + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n (2\Delta x^4) + O(\Delta x^6)
\end{aligned}$$

Prossigo, para eliminar a derivada segunda:

$$\begin{aligned}
u_{i+2}^n + u_{i-2}^n &\approx 2u_i^n + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n (8\Delta x^2) + \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n (32\Delta x^4)\\
-4(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) &\approx -8u_i^n - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n (8\Delta x^2) - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n (8\Delta x^4) \;\Rightarrow\\
u_{i+2}^n + u_{i-2}^n - 4(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) &\approx -6u_i^n + \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n (24\Delta x^4),\\
\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n (24\Delta x^4) &\approx u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n,\\
\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n &\approx \frac{u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{24\Delta x^4} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Dada a equação de advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

o esquema *upwind* explícito

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

também apresenta um pouco de difusão numérica (embora menos do que o esquema de Lax). Reescreva a equação de diferenças finitas acima explicitando o termo de difusão numérica.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{c}{\Delta x}\left[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right] = \frac{c}{\Delta x}\left[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right]$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x}\left[u_{i+1}^n - u_i^n\right] = \frac{c\Delta x}{\Delta x^2}\left[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Ainda sobre a equação de advecção, analise a estabilidade do esquema de diferenças *implícito*

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right)$$

(von Neumann); conclua sobre sua estabilidade/instabilidade condicional/incondicional.
Sugestão: Note que, para qualquer k_l,

$$\left|1 + \mathrm{Co}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)\right| \geq 1.$$

Para demonstrar a afirmativa acima **(sim, você vai precisar fazer isso)**, pode ser útil aliviar a notação com

$$\begin{aligned} C_k &\equiv \cos(k_l\Delta x),\\ S_k &\equiv \operatorname{sen}(k_l\Delta x). \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{Co}\left[\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right]\\
\mathrm{e}^{a\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{Co}\mathrm{e}^{a\Delta t}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right]\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \mathrm{Co}\mathrm{e}^{a\Delta t}\left[1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right]\\
\mathrm{e}^{a\Delta t}\left[1 + \mathrm{Co}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)\right] &= 1\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \frac{1}{1 + \mathrm{Co}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)}
\end{aligned}$$

O número complexo no denominador da expressão do lado direito acima tem módulo maior ou igual a 1. De fato:

$$\begin{aligned}
z &= 1 + \mathrm{Co}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)\\
&= 1 + \mathrm{Co}\left[1 - (C_k - \mathrm{i}S_k)\right]\\
&= 1 + \mathrm{Co} - \mathrm{Co}C_k + \mathrm{i}\mathrm{Co}S_k;\\
|z|^2 &= 1 + \mathrm{Co}^2 + \mathrm{Co}^2C_k^2 + 2(\mathrm{Co} - \mathrm{Co}C_k - \mathrm{Co}^2C_k) + \mathrm{Co}^2S_k^2\\
&= 1 + 2\mathrm{Co}^2 + 2(\mathrm{Co} - \mathrm{Co}C_k - \mathrm{Co}^2\,C_k)\\
&= 1 + 2\mathrm{Co} + 2\mathrm{Co}^2 - 2C_k\mathrm{Co}(1 + \mathrm{Co})\\
&= 1 + 2\mathrm{Co}(1 + \mathrm{Co}) - 2C_k\mathrm{Co}(1 + \mathrm{Co})\\
&= 1 + 2\mathrm{Co}(1 + \mathrm{Co})(1 - C_k) \geq 1,
\end{aligned}$$

e o esquema é incondicionalmente estável ■

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 02 Out 2015
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Para fazer a 1ª tarefa do trabalho computacional, você precisa calcular

$$
\begin{aligned}
\phi(\eta,0) &= F(\eta),\\
\eta &= I_{F^3}(2/3,1/2),
\end{aligned}
$$

onde $I_x(\alpha,\beta)$ é a função beta incompleta. Suponha que esta última foi implementada como `betainc(alfa,beta,x)` (**atenção para a posição dos parâmetros** α, β **e do argumento** x **na implementação em Python**) e está disponível para seu uso. Escreva um trecho de programa em Python (alinhe e "indente" com cuidado) que calcule **e imprima** 1000 pares de $(\eta, F(\eta))$ **nesta ordem**, com $0 \le F(\eta) \le 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from scipy.special import betainc
from numpy import zeros,arange
fou = open('banana.out','wt')
df = 1.0e-3
f = arange(0.0,1.0+df,df,float)
lf = len(f)
eta = zeros(lf,float)
for i in range(lf):
   eta[i] = betainc(2.0/3.0,1.0/2.0,f[i]**3)
pass
for i in range(lf):
   fou.write('%8.4f %8.4f\n' % (eta[i],f[i]))
pass
fou.close()
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Dada a igualdade de Parseval para séries de Fourier trigonométricas,

$$\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n^2 + B_n^2\right],$$

e usando **obrigatoriamente** a série de Fourier da extensão ímpar da função $f(x) = 2 - x,\ 0 \le x \le 2$:

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2},$$

obtenha uma série infinita cuja soma é igual a $\pi^2/6$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \times 2 \times \int_0^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi n}\right)^2 \\
\frac{4}{3} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi n}\right)^2 \\
\frac{8}{3\times 16}\pi^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \\
\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Seja $\mathbb{V}$ o conjunto das funções $f(x)$ complexas de uma variável independente x real, tais que a integral

$$\int_0^1 |f(x)|^2 w(x)\,\mathrm{d}x$$

existe, com

$$w(x) = 1 - x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Se $f(x), g(x) \in \mathbb{V}$, mostre que

$$\langle f(x), g(x)\rangle \equiv \int_0^1 f^*(x) g(x) w(x)\,\mathrm{d}x$$

é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= \int_0^1 f^*(x) f(x) w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 |f(x)|^2 w(x)\,\mathrm{d}x \ge 0,\end{aligned}$$

pois $w(x) \ge 0$ em $0 \le x \le 1$.
b)

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_0^1 f^*(x) g(x) w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left[f(x) g^*(x) w(x)\right]^*\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(Note que $w(x) \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}&= \left[\int_0^1 g^*(x) f(x) w(x)\,\mathrm{d}x\right]^*\\ &= \langle g, f\rangle^*.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\langle f, g + h\rangle &= \int_0^1 f^*(x)[g(x) + h(x)] w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 f^*(x) g(x) w(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f^*(x) h(x) w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\langle f, \alpha g\rangle &= \int_0^1 f^*(x)[\alpha g(x)] w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha \int_0^1 f^*(x) g(x) w(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha\langle f, g\rangle \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Obtenha a série trigonométrica de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} +1, & 0 \le x \le 1, \\ -1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Identifico $a = 0$, $b = 2$, $L = 2$; então,

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0; \\ A_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - 0 = 0; \\ B_n &= \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right] \qquad \Rightarrow \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right] \operatorname{sen}(n\pi x) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Calcule a transformada de Fourier da função par

$$f(x) = \begin{cases} +1, & |x| \le 1, \\ e^{-|x|}, |x| > 1 \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\cos(kx) - i \operatorname{sen}(kx) \right]\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(kx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(x) \cos(kx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^1 \cos(kx)\, dx + \int_1^{\infty} e^{-x} \cos(kx)\, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen}(k)}{k} - \frac{k \operatorname{sen}(k) - \cos(k)}{e(k^2+1)} \right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 30 Out 2015
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] O esquema numérico implementado em sua 2ª tarefa computacional foi

$$-\left[\mathrm{Fo}\overline{\phi}_{i-1}^{n}\right]\phi_{i-1}^{n+1}+\left[1+\mathrm{Fo}\left(\overline{\phi}_{i-1}^{n}+\overline{\phi}_{i}^{n}\right)\right]\phi_{i}^{n+1}-\left[\mathrm{Fo}\overline{\phi}_{i}^{n}\right]\phi_{i+1}^{n+1}=\phi_{i}^{n}.$$

As seguintes definições foram propostas para as bandas ("diagonais") dos sistemas de equações lineares:

$$\begin{aligned}
A_{i-1}^{n} &\equiv -\left[\mathrm{Fo}\overline{\phi}_{i-1}^{n}\right],\\
B_{i-1}^{n} &\equiv \left[1+\mathrm{Fo}\left(\overline{\phi}_{i-1}^{n}+\overline{\phi}_{i}^{n}\right)\right],\\
C_{i-1}^{n} &\equiv -\left[\mathrm{Fo}\overline{\phi}_{i}^{n}\right],
\end{aligned}$$

resultando em

$$A_{i-1}^{n}\phi_{i-1}^{n+1}+B_{i-1}^{n}\phi_{i}^{n+1}+C_{i-1}^{n}\phi_{i+1}^{n+1}=\phi_{i}^{n}. \tag{**}$$

A equação (**) é muito parecida com aquela obtida para a **equação da difusão linear**, exceto por **uma diferença muito importante**, do ponto de vista da implementação computacional. Que diferença é essa?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A matriz do sistema tem que ser recalculada a cada passo de tempo.

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Obtenha a solução de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(T+t)}x = \frac{1}{T}f(t)$$

pelo método das funções de Green.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Inicialmente, note que o enunciado do problema é feito para explicitar a consistência dimensional. Se

$$\begin{aligned} [\![x]\!] &= [\![f]\!], \\ [\![t]\!] &= [\![T]\!], \end{aligned}$$

então a equação diferencial é dimensionalmente consistente. Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{(T+\tau)}x &= \frac{1}{T}f(\tau), \\ G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + x\frac{1}{(T+\tau)}G(t,\tau) &= \frac{1}{T}G(t,\tau)f(\tau), \\ \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\frac{1}{(T+\tau)}G(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty}\frac{1}{T}G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Integrando o primeiro termo do lado esquerdo por partes:

$$xG\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^{\infty} x\frac{1}{(T+\tau)}G\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty}\frac{1}{T}Gf\,\mathrm{d}\tau.$$

Para eliminar a dependência de $x(\infty)$, fazemos $G(t,\infty) = 0$; então,

$$-x(0)G(t,0) + \int_0^{\infty} x\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{(T+\tau)}G\right]\mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty}\frac{1}{T}Gf\,\mathrm{d}\tau.$$

Como sempre, o método das funções requer agora que o termo entre colchetes seja igual a $\delta(\tau - t)$ pois, neste caso,

$$x(t) = x(0)G(t,0) + \int_{\tau=0}^{\infty}\frac{1}{T}G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Precisamos portanto resolver a equação diferencial

$$-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{(T+\tau)}G = \delta(\tau - t).$$

Essa é uma equação de ordem 1 apenas, porém com coeficientes não-constantes, de modo que não é uma boa idéia tentar uma solução por transformada de Laplace. Tentemos, portanto,

$$G(t,\tau) = u(t,\tau)v(t,\tau);$$

inserindo essa tentativa na equação diferencial, obtém-se

$$\begin{aligned} u\left[-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{(T+\tau)}v\right] - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau - t), \\ -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{(T+\tau)}v &= 0 \;\Rightarrow \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{1}{(T+\tau)}v, \\ \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \frac{\mathrm{d}\tau}{(T+\tau)}, \\ \int_{v=v(t,0)}^{v(t,\tau)}\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_{\theta=0}^{\tau}\frac{1}{(T+\theta)}\,\mathrm{d}\theta, \\ \ln v(t,\tau) - \ln v(t,0) &= [\ln(T+\tau) - \ln(T)] = \ln\left(\frac{T+\tau}{T}\right), \\ \ln\frac{v(t,\tau)}{v(t,0)} &= \ln\left(\frac{T+\tau}{T}\right), \\ v(t,\tau) &= v(t,0)\frac{T+\tau}{T}. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Com isso, a equação diferencial em u é

$$
\begin{aligned}
-v(t,0)\frac{T+\tau}{T}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau - t),\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} &= -\frac{1}{v(t,0)}\left[\frac{T}{T+\theta}\right]\delta(\theta - t),\\
u(t,\tau) - u(t,0) &= -\frac{1}{v(t,0)}\int_{\theta=0}^{\tau}\left[\frac{T}{T+\theta}\right]\delta(\theta - t)\,\mathrm{d}\theta;\\
u(t,\tau) &= u(t,0) - \frac{H(\tau - t)}{v(t,0)}\frac{T}{T+t}.
\end{aligned}
$$

Obtemos agora a função de Green:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= u(t,\tau)v(t,\tau)\\
&= \underbrace{u(t,0)v(t,0)}_{G(t,0)}\left[\frac{T+\tau}{T}\right] - H(\tau - t)\left[\frac{T+\tau}{T+t}\right]\\
&= [T+\tau]\left[\frac{G(t,0)}{T} - \frac{H(\tau - t)}{T+t}\right].
\end{aligned}
$$

Note que quando $\tau \to \infty$, $H(\tau - t) = 1$, e o segundo colchete deve se anular; portanto,

$$
G(t,0) = \frac{T}{T+t},
$$

e

$$
G(t,\tau) = [1 - H(\tau - t)]\left[\frac{T+\tau}{T+t}\right]
$$

A solução fica, finalmente,

$$
x(t) = x(0)\frac{T}{T+t} + \int_{\tau=0}^{t}\left[\frac{T+\tau}{T+t}\right] f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Obtenha os autovalores e os autovetores do problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

com

$$y'(0) = 0,$$
$$y(\pi) = 0.$$

Sugestão: Discuta os sinais de λ para as 3 situações clássicas: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$. Quais desses são possíveis?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) $\lambda < 0$. Faça $\lambda = -k^2$:

$$\begin{aligned} r^2 - k^2 &= 0, \\ r^2 &= k^2, \\ r &= \pm k, \\ y(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx), \\ y'(x) &= A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cosh(kx); \\ y'(0) = 0 \Rightarrow B\cosh(0) &= 0 \Rightarrow B = 0. \\ y(\pi) = 0 \Rightarrow A\cosh(k\pi) &= 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \text{ (não)}. \end{aligned}$$

b) $\lambda = 0$. Então,

$$\begin{aligned} y''(x) &= 0, \\ y'(x) &= A, \\ y(x) &= Ax + B; \\ y'(0) = 0 &\Rightarrow A = 0, \\ y(\pi) = 0 &\Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \text{ (não)}. \end{aligned}$$

c) $\lambda > 0$. Faça $\lambda = k^2$:

$$\begin{aligned} r^2 + k^2 &= 0, \\ r &= \pm k\mathrm{i}, \\ y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx), \\ y'(x) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right]; \\ y'(0) = 0 &\Rightarrow kB\cos(0) = 0 \Rightarrow B = 0; \\ y(\pi) = 0 &\Rightarrow A\cos(k\pi) = 0 \Rightarrow \\ k\pi &= \pi/2 + n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{1}{2} + n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \\ \lambda_n &= \left[\frac{1}{2} + n\right]^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \\ y_n(x) &= \cos(k_n x), \end{aligned}$$

e apenas os valores $\lambda > 0$ são possíveis ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Resolva com o método das características:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} &= -k\phi,\\
\phi(x,0) &= f(x),
\end{aligned}
$$

onde k e c são constantes positivas, e $f(x)$ é uma função qualquer.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
x &= X(s),\\
t &= T(t),\\
\phi(x,t) &= \phi(X(s),T(s)) = \Phi(s).
\end{aligned}
$$

Comparamos agora:

$$
\begin{aligned}
-k\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}c,\\
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}.
\end{aligned}
$$

O resultado é o sistema de EDO's:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1, & t &= T(s) = s,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= c, & x &= X(s) = X(0) + cs,\\
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} &= -k\Phi, & \phi &= \Phi(s) = \Phi(0)\exp(-ks).
\end{aligned}
$$

Agora nós "montamos" a solução:

$$
\begin{aligned}
s &= t,\\
X(0) &= x - ct,\\
\Phi(0) &= \phi(X(0),0) = \phi(x-ct,0) = f(x-ct),\\
\phi(x,t) &= f(x-ct)\exp(-kt) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Obtenha a série trigonométrica de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} +1, & 0 \le x \le 1, \\ -1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Identifico $a = 0$, $b = 2$, $L = 2$; então,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0; \\
A_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 - 0 = 0; \\
B_n &= \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right] \qquad \Rightarrow \\
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right]\operatorname{sen}(n\pi x) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 27 Nov 2015
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Usando obrigatoriamente o método das características, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + x\frac{\partial \phi}{\partial x} + y\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \qquad \phi(x,y,0) = f(x,y).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Fazemos

$$\begin{aligned} t &= T(s),\\ x &= X(s),\\ y &= Y(s),\\ \phi(x,y,t) &= \phi(X(s),Y(s),T(s)) = \Phi(s). \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial e comparando com a derivada total,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + x\frac{\partial \phi}{\partial x} + y\frac{\partial \phi}{\partial y},\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1 \Rightarrow T(s) = s + c_T,\ c_T = 0 \text{ (sem perda de generalidade)};\\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= X \Rightarrow X(s) = X(0)\mathrm{e}^{s},\\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} &= Y \Rightarrow Y(s) = Y(0)\mathrm{e}^{s},\\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} &= 0 \Rightarrow \Phi(s) = \text{constante} = \Phi(0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi(x,y,t) = \Phi(s) = \Phi(0) = \phi(X(0),Y(0),0) = f(X(0),Y(0)) = f(x\mathrm{e}^{-t}, y\mathrm{e}^{-t}) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] A equação

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y = 0$$

é uma equação de Sturm-Liouville? Por quê? **Atenção: não confunda com um problema de Sturm-Liouville, porque eu não estabeleci nenhuma condição de contorno. Estou perguntando apenas sobre a equação!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Sim, pois ela se encaixa no molde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y + \lambda w(x)y = 0.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y = 0$$

em função de λ e de duas constantes arbitrárias de integração.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Expandindo,

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \lambda y = 0.$$

Essa é uma equação de Euler. Façamos

$$\begin{aligned} y &= x^m, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= mx^{m-1}, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= (m-1)mx^{m-2}. \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} m(m-1) + 2m - \lambda &= 0, \\ m^2 + m - \lambda &= 0, \\ m &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}, \\ y &= c_1 x^{\frac{-1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}} + c_2 x^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] É possível resolver

$$\frac{\phi}{\mathscr{T}} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$
$$\phi(x,0) = \phi_0,$$
$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0$$

pelo método de separação de variáveis? Substitua

$$\phi = X(x)T(t)$$

e prossiga **apenas** até encontrar uma resposta positiva ou negativa para a pergunta. Note que $\mathscr{T}$ é uma constante com a mesma dimensão de t, e que α^2 é uma constante com a mesma dimensão de x^2/t.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{XT}{\mathscr{T}} + T'X = \alpha^2 TX'',$$
$$\frac{1}{\mathscr{T}} + \frac{T'}{T} = \alpha^2 \frac{X''}{X},$$
$$\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{1}{\mathscr{T}} + \frac{T'}{T}\right] = \frac{X''}{X}.$$

O lado esquerdo da última igualdade acima é uma função apenas de t, e o lado direito é uma função apenas de x. Portanto, o argumento usual,

$$\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{1}{\mathscr{T}} + \frac{T'}{T}\right] = \frac{X''}{X} = \lambda$$

aplica-se, e podemos prosseguir. Note que um problema típico de Sturm-Liouville é imediatamente possível em X, já que devemos ter

$$X(0) = X(L) = 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 09 Dez 2015
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Obtenha a série de Fourier **complexa** da função

$$f(x) = 1 - 2x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Dado $L = b - a$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}},$$

$$c_n = \frac{1}{L}\int_a^b e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} f(x)\,dx.$$

Portanto,

$$c_n = \int_0^1 (1-2x)e^{-\frac{2\pi i n x}{1}}\,dx$$

$$= -\frac{i}{\pi n} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Sabendo que

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = 7/3 \qquad \text{e} \qquad \int_1^2 [\ln x]^2\,\mathrm{d}x = 2[1-\ln 2]^2,$$

obtenha M tal que

$$\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x \le M$$

SEM CALCULAR ESTA ÚLTIMA INTEGRAL, e utilizando obrigatoriamente a desigualdade de Schwarz.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Comece observando que $x\ln x \ge 0$ em $[1,2]$. Defina:

$$\langle f,g\rangle \equiv \int_1^2 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\langle x,x\rangle &= \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = 7/3,\\
\langle \ln x,\ln x\rangle &= \int_1^2 [\ln x]^2\,\mathrm{d}x = 2[1-\ln 2]^2,\\
\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x = \langle x,\ln x\rangle &\le \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle \ln x,\ln x\rangle} = \sqrt{7/3}\,\sqrt{2}(1-\ln 2) = \sqrt{14/3}\,(1-\ln 2) = M \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Considere uma malha retangular com elementos de tamanho $\Delta x \times \Delta t$. Você deseja obter a solução numérica aproximada $\phi_i^n \approx \phi(i\Delta x, n\Delta t)$ da equação da onda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

Supondo que você conheça todos os valores de ϕ_i^n e ϕ_i^{n+1}, $i = 0, \ldots, N_x$, obtenha um esquema **explícito** no tempo para o cálculo de ϕ_i^{n+2}. **Sugestão:** discretize a derivada espacial no tempo $n+1$. **NÃO SE PREOCUPE COM CONDIÇÕES INICIAIS NEM DE CONTORNO.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_i^{n+2} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_i^n}{\Delta t^2} &= \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2};\\
\phi_i^{n+2} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_i^n &= \left[\frac{\Delta t}{\Delta x}\right]^2 \left[\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}\right];\\
\phi_i^{n+2} &= 2\phi_i^{n+1} - \phi_i^n + \left[\frac{\Delta t}{\Delta x}\right]^2 \left[\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Obtenha a solução analítica de

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t \ge 0;\\
u(x,0) &= 1 - x,\\
\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
XT' &= TX'',\\
\frac{T'}{T} &= \frac{X''}{X} = -\lambda.
\end{aligned}
$$

Obviamente, o problema de Sturm-Liouville é

$$
X'' + \lambda X = 0.
$$

Vamos caso a caso: com $k > 0$ sempre,

$$
\begin{aligned}
\lambda &= -k^2 < 0,\\
X(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx),\\
X'(x) &= A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cosh(kx),\\
X'(0) &= 0 \Rightarrow B\cosh(kx) = 0 \Rightarrow B = 0;\\
X'(1) &= 0 \Rightarrow A\,\mathrm{senh}(k) = 0 \Rightarrow A = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda < 0$ não serve.

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 0,\\
X(x) &= Ax + B,\\
X'(x) &= A.\\
X'(0) &= 0 \Rightarrow A = 0;\\
X'(1) &= 0 \Rightarrow A = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $X = 1$ é autofunção do autovalor $\lambda = 0$.

$$
\begin{aligned}
\lambda &= k^2 > 0,\\
X(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
X'(x) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right],\\
X'(0) &= 0 \Rightarrow B = 0;\\
X'(1) &= 0 \Rightarrow -kA\,\mathrm{sen}(k) = 0 \Rightarrow k = n\pi.
\end{aligned}
$$

Portanto, $X_n = \cos(n\pi x)$ é autofunção de $\lambda_n = (n\pi)^2$ ($n > 0$). É conveniente incluir o caso $\lambda = 0$ em:

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= (n\pi)^2, \qquad n \ge 0,\\
X_n &= \cos(n\pi x).
\end{aligned}
$$

Os T_n's correspondentes serão obtidos a partir de

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -(n\pi)^2,\\
\frac{\mathrm{d}T}{T} &= -(n\pi)^2\mathrm{d}t,\\
T_n(t) &= C_n \mathrm{e}^{-(n\pi)^2 t}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Juntando tudo,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-(n\pi)^2 t} \cos(n\pi x), \\
1 - x &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\pi x), \\
(1-x)\cos(m\pi x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\pi x)\cos(m\pi x), \\
\int_0^1 (1-x)\cos(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= C_m \int_0^1 \cos^2(m\pi x)\,\mathrm{d}x, \\
\frac{1-(-1)^m}{\pi^2 m^2} &= \frac{C_m}{2}, \\
C_m &= \frac{2(1-(-1)^m)}{\pi^2 m^2} \qquad (m > 0); \\
\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x &= C_0 = \frac{1}{2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Dada a função

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{L}}, & x \geq 0, \end{cases}$$

obtenha sua transformada de Fourier.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{L}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{L}{1+\mathrm{i}kL} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹