TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 20 mar 2015
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Em um trecho de rio de comprimento L com velocidade média constante U verifica-se uma descarga de esgoto a montante que produz uma concentração volumétrica de matéria orgânica $C_0(t)$ (após a diluição no rio), onde t é o tempo. Um engenheiro ambiental mede a concentração volumétrica de matéria orgânica no fim do trecho ao longo do tempo, $C_L(t)$, e pretende fazer uma análise dimensional com as variáveis C_0, C_L, L, U e t. As dimensões físicas em questão são a massa de matéria orgânica M, o comprimento L e o tempo T. Ele escolhe C_0, U e L para as variáveis que comparecerão em ambos os grupos adimensionais. Um dos grupos deve conter C_L, e o outro t. Encontre os grupos Π_1 e Π_2.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= C_L C_0^a U^b L^c,\\
1 &= \mathsf{M}\mathsf{L}^{-3}(\mathsf{M}\mathsf{L}^{-3})^a(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1})^b(\mathsf{L})^c\\
1 &= \mathsf{M}^{1+a}\mathsf{L}^{-3-3a+b+c}(\mathsf{T})^{-b} \Rightarrow\\
a &= -1,\\
b &= 0,\\
c &= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= t C_0^a U^b L^c,\\
1 &= \mathsf{T}(\mathsf{M}\mathsf{L}^{-3})^a(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1})^b(\mathsf{L})^c\\
1 &= (\mathsf{M})^{a}(\mathsf{L})^{-3a+b+c}(\mathsf{T})^{1-b} \Rightarrow\\
a &= 0,\\
b &= 1,\\
c &= -1.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{C_L}{C_0},\\
\Pi_2 &= \frac{Ut}{L} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] A função sxs na listagem a seguir calcula a série de Taylor de uma função $f(x)$. (i) Identifique a série. (ii) Descubra quem é $f(x)$ *em forma fechada*.

```
def sxs(x) :
   eps = 1.0e-6                 # acurácia
   num = x*x                    # numeradores
   den = 1.0                    # e denominadores
   termo = num/den              # de cada termo
   n = 1                        # n até aqui
   sinal = 1                    # sinais alternados
   soma = termo                 # soma até aqui
   while abs(termo) > eps:
      sinal *= -1
      n += 2
      num *= (x*x)
      den *= (n*(n-1))
      termo = num/den
      soma = soma + sinal*termo
   return soma
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A série é

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left[x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \dots\right] \\
&= x\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right].
\end{aligned}
$$

A função em forma fechada é

$$
f(x) = x \operatorname{sen} x \ \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Expandindo a função e^{-t} dentro da integral abaixo em uma série de Taylor em torno de $t = 0$, e em seguida integrando termo a termo, encontre uma série para $F(x)$, onde

$$F(x) \equiv \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x t^{-1/2}\,\frac{e^{-t}}{}\,dt \\
&= \int_0^x t^{-1/2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}\right]dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x \frac{t^{n-1/2}}{n!}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1/2}}{(n+1/2)n!} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Utilizando o método mais simples do mundo (o método de Euler de ordem 1), obtenha um esquema de diferenças finitas para resolver a EDO

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y = x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (x-y)^{1/2}\,,\\
\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta x} &= (x_n-y_n)^{1/2}\,,\\
y_{n+1} &= y_n + (x_n-y_n)^{1/2}\,\Delta x \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 27 abr 2015
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Dado o vetor $\boldsymbol{v} = (40, 30, 20, 10)$, obtenha sua componente na direção de $\boldsymbol{t} = (1, 2, 3, 4)$ (**cuidado:** esse último não é um vetor unitário).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O vetor unitário $\boldsymbol{u}$ correspondente a $\boldsymbol{t}$ é

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \frac{1}{|\boldsymbol{t}|}\boldsymbol{t}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+4+9+16}}(1,2,3,4)\\
&= \frac{1}{\sqrt{30}}(1,2,3,4).
\end{aligned}$$

A componente de $\boldsymbol{v}$ na direção de $\boldsymbol{u}$, agora, é

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} &= (40,30,20,10)\cdot\frac{1}{30}(1,2,3,4)\\
&= \frac{1}{\sqrt{30}}(40 + 30\times 2 + 20\times 3 + 10\times 4)\\
&= \frac{40+60+60+40}{\sqrt{30}}\\
&= \frac{200}{\sqrt{30}} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Esta questão se refere a transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Uma matriz $[A_{ij}]$ é anti-simétrica quando $A_{ij} = -A_{ji}$. Considere a matriz anti-simétrica

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}:$$

calcule o determinante de $[A]$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i1) batch("2015-1-p02-b.max")
(%i2) A:matrix([0,w3,-w2],[-w3,0,w1],[w2,-w1,0])
                                 [   0      w3    - w2 ]
                                 [                     ]
(%o2)                            [ - w3     0      w1  ]
                                 [                     ]
                                 [  w2    - w1     0   ]
(%i3) determinant(A)
(%o3)                                      0
(%i4) B:transpose(A)
                                 [   0    - w3     w2  ]
                                 [                     ]
(%o4)                            [  w3      0    - w1  ]
                                 [                     ]
                                 [ - w2    w1      0   ]
(%i5) determinant(B)
(%o5)                                      0
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha os autovalores e os autovetores da matriz

$$\begin{bmatrix} 13/6 & -1/3 & -5/6 \\ -1/3 & 5/3 & -1/3 \\ -5/6 & -1/3 & 13/6 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) batch("2015-1-p02-c.max")

read and interpret file: #p/home/nldias/Dropbox/graduacao/matap/provas/2015-1/2015-1-p02-c.max
(%i2) f1:[1,1,1]/sqrt(3)
                               1        1        1
(%o2)                      [-------, -------, -------]
                            sqrt(3)  sqrt(3)  sqrt(3)
(%i3) f2:[-1,2,-1]/sqrt(6)
                               1        2          1
(%o3)                    [- -------, -------, - -------]
                            sqrt(6)  sqrt(6)    sqrt(6)
(%i4) f3:[-3,0,3]/sqrt(18)
                                   1           1
(%o4)                        [- -------, 0, -------]
                                sqrt(2)     sqrt(2)
(%i5) e1:[1,0,0]
(%o5)                              [1, 0, 0]
(%i6) e2:[0,1,0]
(%o6)                              [0, 1, 0]
(%i7) e3:[0,0,1]
(%o7)                              [0, 0, 1]
(%i8) c11:e1 . f1
                                      1
(%o8)                              -------
                                   sqrt(3)
(%i9) c12:e2 . f1
                                      1
(%o9)                              -------
                                   sqrt(3)
(%i10) c13:e3 . f1
                                      1
(%o10)                             -------
                                   sqrt(3)
(%i11) c21:e1 . f2
                                       1
(%o11)                           - -------
                                   sqrt(6)
(%i12) c22:e2 . f2
                                      2
(%o12)                             -------
                                   sqrt(6)
(%i13) c23:e3 . f2
                                       1
(%o13)                           - -------
                                   sqrt(6)
(%i14) c31:e1 . f3
                                       1
(%o14)                           - -------
                                   sqrt(2)
(%i15) c32:e2 . f3
(%o15)                                0
(%i16) c33:e3 . f3
                                      1
(%o16)                             -------
                                   sqrt(2)
(%i17) C:matrix([c11,c12,c13],[c21,c22,c23],[c31,c32,c33])
                      [     1         1         1     ]
                      [  -------   -------   -------  ]
                      [  sqrt(3)   sqrt(3)   sqrt(3)  ]
                      [                               ]
                      [      1        2          1    ]
(%o17)                [ - -------  -------  - ------- ]
                      [   sqrt(6)  sqrt(6)    sqrt(6) ]
                      [                               ]
                      [      1                  1     ]
                      [ - -------     0      -------  ]
                      [   sqrt(2)            sqrt(2)  ]
(%i18) CT:transpose(C)
                      [    1         1          1     ]
                      [ -------  - -------  - ------- ]
                      [ sqrt(3)    sqrt(6)    sqrt(2) ]
                      [                               ]
                      [    1        2                 ]
(%o18)                [ -------   -------       0     ]
                      [ sqrt(3)   sqrt(6)             ]
                      [                               ]
                      [    1         1          1     ]
                      [ -------  - -------   -------  ]
                      [ sqrt(3)    sqrt(6)   sqrt(2)  ]
```

Continue a solução no verso ⟹

```
(%i19) bfloat(C)
       [  5.773502691896258b-1   5.773502691896258b-1  5.773502691896258b-1  ]
       [                                                                     ]
(%o19) [ - 4.08248290463863b-1   8.16496580927726b-1   - 4.08248290463863b-1 ]
       [                                                                     ]
       [ - 7.071067811865475b-1         0.0b0          7.071067811865475b-1  ]
(%i20) A:matrix([1,0,0],[0,2,0],[0,0,3])
                                  [ 1  0  0 ]
                                  [         ]
(%o20)                            [ 0  2  0 ]
                                  [         ]
                                  [ 0  0  3 ]
(%i21) B:CT . A . C
                               [ 13      1     5 ]
                               [ --    - -   - - ]
                               [ 6       3     6 ]
                               [                 ]
                               [   1   5       1 ]
(%o21)                         [ - -   -     - - ]
                               [   3   3       3 ]
                               [                 ]
                               [   5     1  13   ]
                               [ - -   - -  --   ]
                               [   6     3  6    ]
(%i22) load(eigen)
(%o22)          /usr/share/maxima/5.32.1/share/matrix/eigen.mac
(%i23) eigenvectors(B)
(%o23) [[[1, 2, 3], [1, 1, 1]], [[[1, 1, 1]], [[1, - 2, 1]], [[1, 0, - 1]]]]
(%o23)                         2015-1-p02-c.max
```

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Dadas as funções

$$f(x,y,u,v) = x^2 + y^3 + \operatorname{sen}(uv),$$
$$g(x,y,u,v) = x^3 + y^2 + \cos(uv),$$

calcule o jacobiano $\partial(f,g)/\partial(u,v)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} v\cos(uv) & u\cos(uv) \\ -v\operatorname{sen}(uv) & -u\operatorname{sen}(uv) \end{vmatrix} \\
&= -uv\operatorname{sen}(uv)\cos(uv) + uv\operatorname{sen}(uv)\cos(uv) = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 29 mai 2015
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Em um fluido, o campo de velocidade

$$\boldsymbol{u} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - 4z\boldsymbol{k}$$

atravessa região esférica do espaço

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1.$$

Calcule

$$\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}S,$$

onde $\mathscr{S}$ é a superfície da esfera, e $\boldsymbol{n}$ é o vetor unitário normal apontando para fora da superfície em cada ponto de $\mathscr{S}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Usamos o Teorema da divergência:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}S &= \int_{\mathscr{V}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}V \\
&= \int_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathrm{d}V \\
&= \int_{\mathscr{V}} (2 + 2 - 4)\, \mathrm{d}V \\
&= 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Obtenha a solução geral da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Com Maxima,

```
(%i1) edo : 'diff(y,x) + y/x = x ;
                                  dy   y
(%o1)                             -- + - = x
                                  dx   x
(%i2) ode2(edo,y,x);
                                      3
                                     x
                                     -- + %c
                                     3
(%o2)                            y = -------
                                       x
(%i3) ratsimp(%);
                                     3
                                    x  + 3 %c
(%o3)                           y = ---------
                                       3 x
```

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a solução geral da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 5y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Com Maxima,

```
(%i1) edo : 'diff(y,x,2) - 2*'diff(y,x) + 5*y = 0 ;
                                   2
                                  d y      dy
(%o1)                             --- - 2 -- + 5 y = 0
                                    2      dx
                                  dx
(%i2) ode2(edo,y,x);
                                x
(%o2)                   y = %e  (%k1 sin(2 x) + %k2 cos(2 x))
```

$$y = \mathrm{e}^x \left(A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)\right) \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Calcule a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3\mathrm{i})}$$

em torno de $z = 0$ para a região anular $2 < |z| < 3$ do plano complexo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Nós vemos claramente que $|z|/3 < 1 \Rightarrow |z/(3\mathrm{i}) < 1|$, e que $|z|/2 > 1 \Rightarrow 2/|z| < 1$. Separamos em frações parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-2)(z-3\mathrm{i})} &= \frac{1}{3\mathrm{i}-2}\left[\frac{1}{z-3\mathrm{i}} - \frac{1}{z-2}\right] \\
&= \frac{1}{3\mathrm{i}-2}\left[\frac{1}{(-3\mathrm{i})\left(1-\frac{z}{3\mathrm{i}}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{3\mathrm{i}-2}\left[\frac{1}{(-3\mathrm{i})}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3\mathrm{i}}\right)^n\right) - \frac{1}{z}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^m\right)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 26 jun 2015
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Em um futuro distante, você é um ser muito evoluído que vive no planeta Berra, que é muito parecido com o antigo planeta Terra, que foi destruído em uma catástrofe ambiental. Você já viveu 1000001 anos em Berra com clima e hidrologia estatisticamente estacionários (mas não constantes!). Você coletou 1000001 valores de vazão média anual do rio Biguaçu em uma lista de Python contendo `floats`. O nome da lista é `vazao`. Considere o seguinte trecho de programa:

```
vazao.sort()
q50 = vazao[500000]
```

Qual é o significado estatístico da variável q50?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

q50 é a mediana.

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Prove a *identidade de Jacobi:*

$$[\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}]] = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

Você pode usar, se quiser: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}]] &= \epsilon_{mkl} a_m \left[\epsilon_{ijk} b_i c_j\right] \boldsymbol{e}_l \\
&= \epsilon_{mkl}\epsilon_{ijk} a_m b_i c_j \boldsymbol{e}_l \\
&= \epsilon_{lmk}\epsilon_{ijk} a_m b_i c_j \boldsymbol{e}_l \\
&= \left[\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi}\right] a_m b_i c_j \boldsymbol{e}_l \\
&= a_j b_i c_j \boldsymbol{e}_i - a_i b_i c_j \boldsymbol{e}_j \\
&= (a_j c_j) b_i \boldsymbol{e}_i - (a_i b_i) c_j \boldsymbol{e}_j \\
&= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Com o método de Frobenius, obtenha **uma** solução da EDO

$$xy'' + xy' + y = 0$$

da forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1},$$

onde r_1 é a maior raiz da equação indicial.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Fazemos

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1},\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial, encontramos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Fazemos agora no primeiro somatório:

$$\begin{aligned}
m + r &= n + r - 1,\\
m &= n - 1,\\
n &= m + 1,
\end{aligned}$$

e obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-1}^{\infty} (m+r)(m+r+1) a_{m+1} x^{m+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= 0,\\
(r-1) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1) a_{n+1} + (n+r) a_n + a_n\right] x^{n+r} &= 0,\\
(r-1) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1) a_{n+1} + (n+r+1) a_n\right] x^{n+r} &= 0.
\end{aligned}$$

É evidente que, com $a_0 \neq 0$, a equação indicial é

$$r(r-1) = 0 \ \Rightarrow \ r_2 = 0 \text{ ou } r_1 = 1.$$

As raízes diferem por um inteiro; ou a menor raiz leva a 2 soluções, ou não leva a nenhuma. Tentemos com a menor raiz ($r_2 = 0$):

$$\begin{aligned}
n(n+1) a_{n+1} + (n+1) a_n &= 0,\\
a_{n+1} &= -\frac{1}{n} a_n.
\end{aligned}$$

Note que é impossível obter a_1 a partir de a_0: a recursão falha, e a menor raiz não leva a nenhuma solução. Uma única solução ainda é possível com a maior raiz $r_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
(n+1)(n+2) a_{n+1} + (n+2) a_n &= 0,\\
a_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} a_n.
\end{aligned}$$

Fazendo $a_0 = 1$ sem perda de generalidade, não é difícil encontrar o termo geral:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

e uma solução

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Com o método de Frobenius, obtenha **outra** solução da EDO

$$xy'' + xy' + y = 0$$

da forma

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_2},$$

onde $y_1(x)$ é a solução da questão **3**, e r_2 é a menor raiz da equação indicial. Sugestão: para simplificar um pouco suas contas faça, sem perda de generalidade, $c_1 = 0$ (quando precisar).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Já sabemos que a equação indicial é

$$r(r-1) = 0,$$

e que a menor raiz, $r = 0$, não leva a nenhuma solução; temos também uma solução com a forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}.$$

Procuramos então uma segunda solução com a forma:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\ln(x) + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+s},\\
y_2' &= y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+s) c_m x^{m+s-1},\\
y_2'' &= y_1'' \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+s-1)(m+s) c_m x^{m+s-2}.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned}
&\left[xy_1'' \ln x + 2y_1' - \frac{y_1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+s-1)(m+s) c_m x^{m+s-1} \right] + \\
&\qquad \left[xy_1' + y_1 + \sum_{m=0}^{\infty} (m+s) c_m x^{m+s} \right] + y_1 \ln(x) + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+s} = 0;\\
&\qquad (s-1)sc_0 x^{s-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+s)(m+s+1) c_{m+1} + (m+s+1) c_m \right] x^{m+s} = \frac{y_1}{x} - 2y_1'.
\end{aligned}$$

O lado direito da equação acima é calculado como:

$$\begin{aligned}
\frac{y_1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n,\\
-2y_1' &= \sum_{n=0}^{\infty} -2\frac{(-1)^n}{n!}(n+1) x^n\\
\frac{y_1}{x} - 2y_1' &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[2n+1 \right] x^n
\end{aligned}$$

Ficamos com

$$(s-1)sc_0 x^{s-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+s)(m+s+1) c_{m+1} + (m+s+1) c_m \right] x^{m+s} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[2n+1 \right] x^n.$$

Os dois lados da equação acima são compatíveis se escolhermos $s = 0$. Então, podemos igualar termo a termo os lados esquerdo (restante) e direito. Para $n = 0$,

$$\begin{aligned}
n(n+1)c_1 + (n+1)c_0 &= -1,\\
c_0 &= -1.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Observe que não é possível calcular c_1: ele precisa receber um valor arbitrário: $c_1 = \lambda$. Para $n \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
n(n+1)c_{n+1} + (n+1)c_n &= -\frac{(-1)^n}{n!}\left[2n+1\right], \\
nc_{n+1} + c_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(2n+1), \\
c_{n+1} &= -\frac{c_n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)!}(2n+1), \\
c_n &= -\frac{c_{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^n}{(n-1)n!}(2n-1).
\end{aligned}
$$

A listagem 1 mostra o cálculo dos primeiros c_n's.

Listing 1: Valores iniciais de c_n

```
/* vamosac.max */
c[0] : 0$
c[1] : lambda$
c[n] := -c[n-1]/(n-1) + ((-1)**n)/((n-1)*n!)*(2*n-1)$
for n : 1 thru 8 step 1 do (
   print ("n = ", n, "c[n] = ", expand(expand(c[n])))
);
```

A listagem 2 mostra a saída.

Listing 2: Saída de `vamosbd.max`

```
(%i1) batch("vamosac.max")
(%i2) c[0]:0
(%i3) c[1]:lambda
(%i4) c[n]:=(-1)^n*(2*n-1)/((n-1)*n!)+(-c[n-1])/(n-1)
(%i5) for n thru 8 do print("n = ",n,"c[n] = ",expand(expand(c[n])))
n =  1 c[n] =  lambda
               3
n =  2 c[n] =  - - lambda
               2
               lambda   7
n =  3 c[n] =  ------ - -
                 2      6
               35   lambda
n =  4 c[n] =  -- - ------
               72     6
               lambda   101
n =  5 c[n] =  ------ - ---
                 24     720
                7    lambda
n =  6 c[n] =  --- - ------
               225    120
               lambda    283
n =  7 c[n] =  ------ - -----
                720     50400
                1207     lambda
n =  8 c[n] =  ------- - ------
               1411200    5040
```

Com ela, podemos escrever:

$$
y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \lambda\left[x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \ldots\right] - 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{35}{72}x^4 - \frac{101}{720}x^5 + \ldots
$$

Mas

$$
y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1} = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \ldots,
$$

donde

$$
y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \lambda y_1(x) - 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{35}{72}x^4 - \frac{101}{720}x^5 + \ldots
$$

Como antes, toda a série que multiplica λ é linearmente dependente da primeira solução: qualquer valor de λ, e em particular $\lambda = 0$, produz a segunda solução linearmente independente da primeira ∎

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Resolva **como quiser** o problema de valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = t\mathrm{e}^t, \qquad y(0) = 1.$$

Se você quiser, pode usar o fato de que

$$\mathscr{L}\left\{t\mathrm{e}^t\right\} = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i1) edo : 'diff(y,x) + y = x*exp(x) ;
                                         dy               x
(%o1)                                    -- + y = x %e
                                         dx
(%i2) ode2(edo,y,x);
                                                                  2 x
                                       - x   (2 x - 1) %e
(%o2)                          y = %e      (--------------- + %c)
                                                       4
(%i3) %, y = 1, x = 0 ;
                                                          1
(%o3)                                       1 = %c - -
                                                          4
```

ou seja:

$$y(t) = \frac{1}{2}t\mathrm{e}^t - \frac{1}{4}\mathrm{e}^t + \frac{5}{4}\mathrm{e}^{-t} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 6 jul 2015
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] A função `misterio` definida no trecho de Python abaixo calcula uma função bem conhecida em Matemática. Que função é essa?

```
def misterio(x):
   eps = 1.0e-6
   tv = 1.0
   n = 0
   s = tv
   tn = 2*eps
   while abs(tn) > eps:
      n += 1
      tn = x*tv/n
      s += tn
      tv = tn
   pass
   return s
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$e^x.$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Se $\phi(x,y,z)$ é um campo escalar infinitamente diferenciável, prove que

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{0}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_k\\
&= \left[\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\epsilon_{jik}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right]\boldsymbol{e}_k\\
&= \frac{1}{2}\left(\epsilon_{ijk}+\epsilon_{jik}\right)\boldsymbol{e}_k\\
&= \boldsymbol{0}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Resolva (encontre a solução geral)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \mathrm{e}^x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$y(x) = (c_1 + c_2x)\mathrm{e}^x + \frac{x^2\mathrm{e}^x}{2}.$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Encontre a solução geral (em série) da equação diferencial

$$y'' + x^2 y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como sempre,

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1},\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0.$$

Alinhando os expoentes,

$$\begin{aligned}
m + r + 2 &= n + r - 2,\\
m &= n - 4,\\
n &= m + 4.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-4}^{\infty} (m+r+3)(m+r+4) a_{m+4} x^{m+r+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0,\\
(r-1) r a_0 x^{r-2} + r(r+1) a_1 x^{r-1} + (r+1)(r+2) a_2 x^r + (r+2)(r+3) a_3 x^{r+1} +\\
\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r+3)(n+r+4) a_{n+4} + a_n \right] x^{n+r+2} = 0
\end{aligned}$$

A menor raiz da equação indicial $(r-1)r = 0$, $r = 0$, levará a duas soluções:

$$\begin{aligned}
a_0 &\neq 0,\\
a_1 &\neq 0,\\
a_2 &= 0,\\
a_3 &= 0.
\end{aligned}$$

A partir daí,

$$\begin{aligned}
a_{n+4} &= -\frac{a_n}{(n+3)(n+4)},\\
a_n &= -\frac{a_{n-4}}{(n-1)n}.
\end{aligned}$$

As duas soluções LI partindo de $a_0 = 1$ e de $a_1 = 1$ serão:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 1 - \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{672} x^8 - \frac{1}{88704} x^{12} + \frac{1}{21288960} x^{16} - \dots\\
y_2(x) &= x - \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{1440} x^9 - \frac{1}{224640} x^{13} + \frac{1}{61102080} x^{17} - \dots \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Dado problema de valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = \int_0^t (t-\tau)\,\mathrm{sen}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad y(0) = 1,$$

encontre a transformada de Laplace de $y(t)$, $\overline{y}(s)$. **Não é preciso inverter** $\overline{y}(s)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Reconheço do lado direito a convolução das funções $f(t) = t$ e $g(t) = \mathrm{sen}(t)$, cujas transformadas de Laplace são

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[t] &= \frac{1}{s^2}, \\ \mathscr{L}[\mathrm{sen}(t)] &= \frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da Convolução, a transformada de Laplace do lado direito é o produto:

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}.$$

Obtemos: $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -1$. Transformando também o lado esquerdo, e reunindo tudo,

$$\begin{aligned} s\overline{y} - 1 + \overline{y} &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}, \\ \overline{y}(s+1) - 1 &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} \\ \overline{y}(s+1) &= 1 + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} \\ \overline{y} &= \frac{1}{s+1}\left[1 + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right] \\ &= \frac{s^4+s^2+1}{s^5+s^4+s^3+s^2} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹