TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 14 mar 2014
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

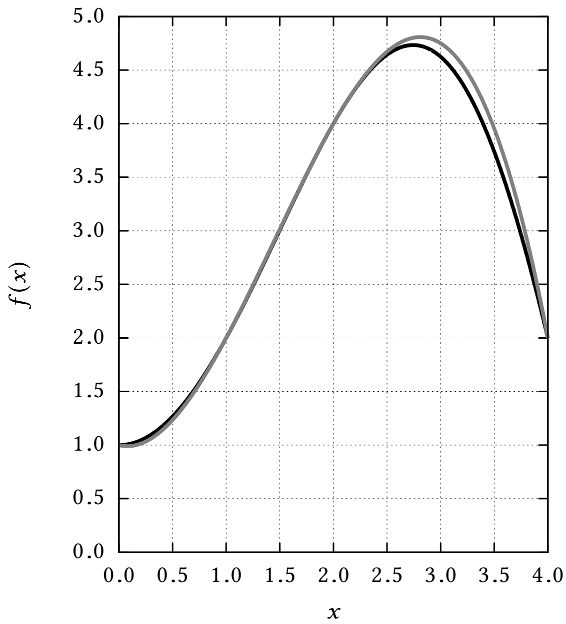
1 [25] Sabe-se que uma função $f(x)$ (em preto à direita) assume os valores da tabela a seguir:

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	2	4	2

a) [05] **Simplesmente contando quadrados ao lado:** qual é a sua estimativa para $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$? **Use um número realista de casas decimais! Indique quantos quadrados inteiros, e quantos pedaços, você contou!**

b) [10] Interpole um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (em cinza à direita) por esses valores: quem são a, b, c, d?

c) [10] Com a dica acima: **usando** $P(x)$, calcule um valor aproximado para $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Eu contei 43 quadrados inteiros, e 12 parciais. Minha estimativa para a área é

$$43 \times 0{,}5 + 12 \times 0{,}125 = 12{,}25.$$

b)

$$P(x) = -\frac{3x^3}{8} + \frac{13x^2}{8} - \frac{x}{4} + 1.$$

c)

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_0^4 P(x)\mathrm{d}x = \frac{38}{3} = 12{,}66 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Próximo da costa, uma onda marítima de gravidade com comprimento L se propaga em uma região com profundidade d, a uma velocidade (celeridade da onda) c. Além dessas variáveis, apenas a aceleração da gravidade g é importante no fenômeno. Encontre todos os parâmetros adimensionais que governam esse problema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As variáveis e suas dimensões são

L	L
d	L
c	LT^{-1}
g	LT^{-2}

Há 4 variáveis e 2 dimensões fundamentais; deve haver 2 grupos adimensionais. Escolhemos L e g para participarem de todos eles. Então:

$$\Pi_1 = dL^a g^b$$

donde $a = -1$, $b = 0$.

$$\Pi_1 = d/L.$$

$$\Pi_2 = cL^a g^b$$

donde $a = b = -1/2$.

$$\Pi_2 = \frac{c}{\sqrt{gL}}$$

Observação: Em Mecânica dos Fluidos, é mais comum usar

$$\Pi_1 = \frac{d}{L}, \qquad \Pi_2 = \frac{c}{\sqrt{gd}}$$

e interpretar Π_2 como um número de Froude. Ambas as opções são válidas, e equivalentes.

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Expandindo a função $\operatorname{senh}(t)$ dentro da integral abaixo em uma série de Taylor em torno de $t = 0$, e em seguida integrando termo a termo, encontre a série de Taylor de $F(x)$, onde

$$F(x) \equiv \int_{0_+}^{x} \frac{\operatorname{senh}(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Talvez seja útil lembrar-se de que

$$\operatorname{senh}(x) \equiv \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \frac{\operatorname{senh}(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{1}{t}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n}\right]\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^x \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\times(2n+1)!} x^{2n+1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Dados um ponto Q e uma reta r no espaço, $r: \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{m}$ ($\boldsymbol{p}_0$ e $\boldsymbol{m}$ sendo vetores conhecidos e $|\boldsymbol{m}| = 1$), a menor distância de Q à reta é o módulo do vetor $\overrightarrow{PQ}$, onde o ponto P está na reta, e $\overrightarrow{PQ} \perp \boldsymbol{m}$ (o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta r).
Observando que Q é a extremidade de um vetor $\boldsymbol{q}$ conhecido (que parte da origem); que P é a extremidade do vetor $\boldsymbol{p}(t_*)$; que $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}(t_*)$, e usando a condição de perpendicularidade mencionada acima, obtenha o t_* (que define o ponto P) em função de $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}_0$ e $\boldsymbol{m}$, usando o produto escalar.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}(t_*) &= \boldsymbol{q} - [\boldsymbol{p}_0 + t_*\boldsymbol{m}];\\
0 &= [\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}(t_*)] \cdot \boldsymbol{m}\\
&= [\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{p}_0 + t_*\boldsymbol{m})] \cdot \boldsymbol{m};\\
&= [\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0] \cdot \boldsymbol{m} - t_*;\\
t_* &= [\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0] \cdot \boldsymbol{m} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 11 abr 2014
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [40] Obtenha os autovalores e autovetores da matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sugestão: uma das 3 raízes da equação característica é um número fácil de ser testado e "descoberto".

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i1) a : matrix( [3,4,2],[4,3,2],[2,2,1]) ;
                                   [ 3  4  2 ]
                                   [         ]
(%o1)                              [ 4  3  2 ]
                                   [         ]
                                   [ 2  2  1 ]
(%i2) eigenvectors(a);
(%o2) [[[4 - sqrt(17), sqrt(17) + 4, - 1], [1, 1, 1]],
                        sqrt(17) + 3            sqrt(17) - 3
             [[[1, 1, - ------------]], [[1, 1, ------------]], [[1, - 1, 0]]]]
                             2                        2
(%i3) eigenvalues(a);
(%o3)           [[4 - sqrt(17), sqrt(17) + 4, - 1], [1, 1, 1]]
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Se $\boldsymbol{u}$ é a função vetorial

$$\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \mapsto \boldsymbol{u} = (y^2 + z^3, x^3 + z^2, x^2 + y^3),$$

calcule

$$I_{\mathscr{S}} = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}) dA$$

sobre a superfície $\mathscr{S}$ formada pelo prisma reto definido pelos vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,2)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
É melhor usar o teorema da divergência!

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 + z^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + z^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^3\right) = 0;$$
$$\int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}S = \int_{\mathscr{C}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}V = 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [30] Obtenha a solução geral da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y/x = \operatorname{sen}(x)/x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i1) eqd : 'diff(y,x) + y/x - sin(x)/x ;
                              dy   y   sin(x)
(%o1)                         -- + - - ------
                              dx   x     x
(%i2) ode2(eqd,y,x);
                                  %c - cos(x)
(%o2)                         y = -----------
                                       x
```

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 16 mai 2014
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [50] Obtenha os 5 primeiros termos da solução em série mais fácil de encontrar da EDO

$$xy'' + (1 + x + x^2)y' + y = 0.$$

Observação: deverá ser óbvio para você qual é a solução mais fácil de encontrar.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiro verificamos se o método de Frobenius se aplica: na forma normal,

$$y'' + \underbrace{\left(\frac{1}{x} + 1 + x\right)}_{p(x)} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{q(x)} y = 0.$$

Agora,

$$\begin{aligned} xp(x) &= 1 + x + x^2, \\ x^2q(x) &= x. \end{aligned}$$

Ambas são analíticas em $x = 0$, e esse é um ponto singular regular. Portanto, podemos tentar Frobenius:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na EDO, encontramos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Tentemos colocar todos os expoentes na forma x^{n+r-1}:

$$\begin{aligned} m + r - 1 &= n + r, \\ m - 1 &= n, \\ m &= n + 1. \end{aligned}$$

assim como

$$\begin{aligned} l + r - 1 &= n + r + 1, \\ l - 1 &= n + 1, \\ l - 2 &= n, \\ l &= n + 2. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Nos somatórios, teremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{m=1}^{\infty}(m-1+r)a_{m-1}x^{m+r-1} + \sum_{m=1}^{\infty}a_{m-1}x^{m+r-1} + \sum_{l=2}^{\infty}(l+r-2)a_{l-2}x^{l+r-1} = 0,$$

ou:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1+r)a_{n-1}x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)a_{n-2}x^{n+r-1} = 0.$$

Claramente, devemos separar os termos envolvendo $n = 0$ e $n = 1$ dos demais:

$$[(r-1)r+r]\,a_0x^{r-1} + \{[r(r+1)+(r+1)]a_1 + [r+1]a_0\}\,x^r + \sum_{n=2}^{\infty}\{[(n+r-1)(n+r)+(n+r)]a_n + [n+r]a_{n-1} + [n+r-2]a_{n-2}\}\,x^{n+r-1} = 0,$$

ou:

$$\left[r^2\right]a_0x^{r-1} + \left\{[r^2+2r+1]a_1 + [r+1]a_0\right\}x^r + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{[(n+r)^2]a_n + [n+r]a_{n-1} + [n+r-2]a_{n-2}\right\}x^{n+r-1} = 0.$$

Se impusermos (como devemos) $a_0 \neq 0$, teremos $r^2 = 0$, e $r = 0$ é uma *raiz dupla.* Fazendo, sem perda de generalidade, $a_0 = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= -1,\\
n^2a_n + na_{n-1}(n-2)a_{n-2} &= 0,\\
a_n + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{(n-2)a_{n-2}}{n^2} &= 0,\\
a_n &= -\left[\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{(n-2)a_{n-2}}{n^2}\right].
\end{aligned}$$

Como temos a_0 e a_1, todos os demais, a partir de $n = 2$, são facilmente obtidos:

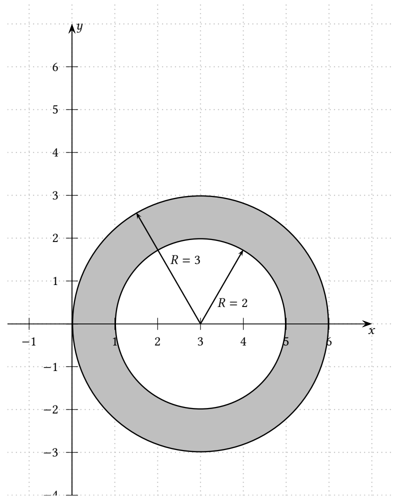
$$y_1(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{18}x^3 - \frac{7}{144}x^4 + \frac{59}{3600}x^5 + \frac{173}{64800}x^6 + \ldots \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Para a região anelar indicada em cinza na figura ao lado, obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z(z - [3 + 2\mathrm{i}])}$$

em torno do ponto $z = 3 + 0\mathrm{i}$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Claramente, a região de validade da série de Laurent é limitada pelas singularidades $z = 0$ e $z = [3 + 2\mathrm{i}]$ da função. A região em cinza é

$$2 < |z - 3| < 3.$$

Expandindo em frações parciais,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{3+2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{z - [3+2\mathrm{i}]} - \frac{1}{z}\right] \\
&= \frac{1}{3+2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{(z-3) - 2\mathrm{i}} - \frac{1}{(z-3)+3}\right] \\
&= \frac{1}{3+2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{z-3}\left(\frac{1}{1 - \frac{2\mathrm{i}}{z-3}}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\frac{(z-3)}{3} + 1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3+2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{z-3}\left(\frac{1}{1 - \frac{2\mathrm{i}}{z-3}}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 + \frac{(z-3)}{3}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Note que arranjamos dessa forma porque, na região anelar de interesse,

$$\begin{aligned}
|2\mathrm{i}| &< |z-3|, \\
\left|\frac{2\mathrm{i}}{z-3}\right| &< 1;
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|z-3| &< 3, \\
\left|\frac{z-3}{3}\right| &< 1.
\end{aligned}$$

Os termos entre parênteses na expansão de $f(z)$ acima, portanto, são:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - \frac{2\mathrm{i}}{z-3}} &= 1 + \left(\frac{2\mathrm{i}}{z-3}\right) + \left(\frac{2\mathrm{i}}{z-3}\right)^2 + \left(\frac{2\mathrm{i}}{z-3}\right)^3 + \ldots; \\
\frac{1}{1 + \frac{z-3}{3}} &= 1 - \left(\frac{z-3}{3}\right) + \left(\frac{z-3}{3}\right)^2 - \left(\frac{z-3}{3}\right)^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(z) = \frac{1}{3+2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\mathrm{i}}{z-3}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{3}\right)^n\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 06 jun 2014
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] Considere o seguinte modelo para a dispersão de um poluente em um rio em regime permanente:

$$2\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 3\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}x^2} - c, \qquad c(0) = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}c(0)}{\mathrm{d}x} = 0,$$

onde x é a distância ao longo do rio, e $c(x)$ é a concentração do poluente. Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, obtenha $c(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
2\left[s\overline{c}(s) - c(0)\right] &= 3\left[s^2\overline{c}(s) - sc(0) - c'(0)\right] - \overline{c},\\
\overline{c}\left[2s + 1 - 3s^2\right] &= 2 - 3s,\\
\overline{c} &= \frac{2-3s}{2s+1-3s^2}\\
&= \frac{9}{4}\frac{1}{(3s+1)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)} \Rightarrow\\
c(x) &= \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-x/3}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Resolva:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T} = x_1\delta(t-a), \qquad a > 0, \qquad x(0) = x_0,$$

onde x_0 e x_1 são constantes com a mesma dimensão física de x, e T é uma constante com a mesma dimensão física de t.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Havia um erro de tipografia, que muda a solução da questão. Para a questão conforme consta do enunciado (com o erro de tipografia…), a solução é:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{T} + x_1\delta(t-a);\\
d\xi &= -\frac{d\tau}{T} + x_1\delta(\tau-a)d\tau;\\
\int_{x_0}^{x(t)} d\xi &= -\frac{t}{T} + x_1 H(t-a);\\
x(t) &= x_0 - \frac{t}{T} + x_1 H(t-a) \blacksquare
\end{aligned}$$

O enunciado que deveria ter sido impresso é um pouco diferente:
Resolva:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{T} = x_1\delta(t-a), \qquad a > 0, \qquad x(0) = x_0,$$

onde x_0 e x_1 são constantes com a mesma dimensão física de x, e T é uma constante com a mesma dimensão física de t.
A solução deste último é:
Tente $x = uv$, e substitua:

$$\begin{aligned}
u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} + \frac{1}{T}uv &= x_1\delta(t-a),\\
u\left[\frac{dv}{dt} + \frac{1}{T}v\right] + v\frac{du}{dt} &= x_1\delta(t-a).
\end{aligned}$$

Zerando o colchete:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= -\frac{v}{T},\\
\frac{dv}{v} &= -\frac{dt}{T},\\
\ln|v| &= -t/T + k_1,\\
|v| &= \exp(k_1)\exp(-t/T),\\
v &= \pm\exp(k_1)\exp(-t/T),\\
v(t) &= v(0)\exp(-t/T).
\end{aligned}$$

Substituindo no que restou:

$$\begin{aligned}
v(0)\exp(-t/T)\frac{du}{dt} &= x_1\delta(t-a),\\
\frac{du}{dt} &= \frac{x_1}{v(0)}\exp(t/T)\delta(t-a),\\
du &= \frac{x_1}{v(0)}\exp(\tau/T)\delta(\tau-a)\,d\tau,\\
u(t) - u(0) &= \frac{x_1}{v(0)}\int_0^t \exp(\tau/T)\delta(\tau-a)\,d\tau\\
u(t) - u(0) &= \frac{x_1}{v(0)}\exp(a/T)H(t-a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) = u(t)v(t) &= v(0)\exp(-t/T)\left[u(0) + \frac{x_1}{v(0)}\exp(a/T)H(t-a)\right]\\
&= u(0)v(0)\exp(-t/T) + x_1\exp(-(t-a)/T)H(t-a)\\
&= x_0\exp(-t/T) + x_1\exp(-(t-a)/T)H(t-a) \blacksquare
\end{aligned}$$

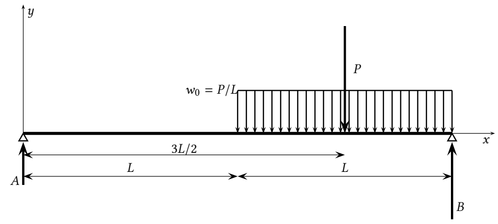
Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Para a viga da figura ao lado:

a) [20] Escreva o carregamento **total** (incluindo as reações de apoio) sobre a viga, $w(x)$, utilizando as "funções" delta de Dirac e de Heaviside.

b) [20] Utilizando **obrigatoriamente** as equações de equilíbrio $\int w(x)\,\mathrm{d}x = 0$ e $\int x w(x)\,\mathrm{d}x = 0$, **com os limites apropriados e com** $w(x)$ **obtido em (a)**, encontre duas equações para as reações de apoio A e B. Resolva, obtendo os seus valores.

ATENÇÃO: Use o sistema de coordenadas indicado na figura.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$w(x) = A\delta(x) - \frac{P}{L}\left[H(x-L) - H(x-2L)\right] - P\delta(x-3L/2) + B\delta(x-2L).$$

b.1)

$$\int_{0_-}^{2L_+} w(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{0_-}^{2L_+} \left[A\delta(x) - \frac{P}{L}\left[H(x-L) - H(x-2L)\right] - P\delta(x-3L/2) + B\delta(x-2L)\right] \mathrm{d}x = 0.$$

Mas, para $a < c < b$:

$$\int_a^b H(x-c)\mathrm{d}x = \int_c^b \mathrm{d}x = (b-c);$$

então,

$$A - \frac{P}{L}\left[(2L-L) + (2L-2L)\right] - P + B = 0,$$

$$A + B = 2P.$$

b.2)

$$\int_{0_-}^{2L_+} x w(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{0_-}^{2L_+} \left[Ax\delta(x) - \frac{P}{L}\left[xH(x-L) - xH(x-2L)\right] - P\delta(x-3L/2) + B\delta(x-2L)\right] \mathrm{d}x = 0.$$

Mas, para $a < c < b$:

$$\int_a^b x\delta(x-c)\,\mathrm{d}x = c;$$

$$\int_a^b xH(x-c)\mathrm{d}x = \int_c^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2 - c^2);$$

então,

$$-\frac{P}{L}\left[\frac{1}{2}\left((2L)^2 - L^2\right) + \frac{1}{2}\left((2L)^2 - (2L)^2\right)\right] - P\frac{3L}{2} + B2L = 0$$

$$-\frac{3}{2}PL - \frac{3}{2}PL + 2BL = 0,$$

$$2B = 3P,$$

$$B = \frac{3P}{2},$$

$$A = \frac{P}{2} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 11 Jul 2014
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

1 [20] Toda explosão consiste na liberação de uma certa quantidade de energia E (armazenada nas ligações químicas do explosivo, ou nos núcleos dos átomos, no caso de uma explosão nuclear) para o ambiente (para fixar idéias, considere que a explosão ocorre na atmosfera). A explosão consiste na propagação de uma onda esférica de pressão e densidade cujo raio depende do tempo: $R = R(t, \ldots)$. Dentro da onda, a pressão e a densidade são muito maiores que a pressão ambiente p, e a densidade do ar ambiente, ρ. Suponha que as 5 variáveis que "mandam" no problema sejam p, R, t, E, ρ. Obtenha os dois grupos adimensionais correspondentes, sendo que um deve conter p (com expoente 1), t, E, ρ; e o outro deve conter R (com expoente 1), t, E, ρ.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Use as grandezas fundamentais M, L, T; t, E, ρ devem conter, entre si, as 3 grandezas fundamentais. De fato,

$$
\begin{aligned}
[\![t]\!] &= \mathsf{T},\\
[\![E]\!] &= \mathsf{M\,L^2\,T^{-2}},\\
[\![\rho]\!] &= \mathsf{M\,L^{-3}}.
\end{aligned}
$$

Os dois grupos adimensionais são obtidos da seguinte forma: o primeiro é

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= p t^a E^b \rho^c,\\
[\![\Pi_1]\!] &= \left[\mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-2}}\right][\mathsf{T}]^a\left[\mathsf{M\,L^2\,T^{-2}}\right]^b\left[\mathsf{M\,L^{-3}}\right]^c\\
&= \mathsf{M}^{1+b+c}\mathsf{L}^{-1+2b-3c}\mathsf{T}^{-2+a-2b}.
\end{aligned}
$$

O sistema de equações resultante é

$$
\begin{aligned}
0a + 1b + 1c &= -1,\\
0a + 2b - 3c &= +1,\\
1a - 2b + 0c &= 2,
\end{aligned}
$$

cuja solução é $a = 6/5$, $b = -2/5$, $c = -3/5$. O primeiro grupo adimensional, portanto, é:

$$
\Pi_1 = p t^{6/5} E^{-2/5} \rho^{-3/5}.
$$

O próximo grupo é

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= R t^a E^b \rho^c,\\
[\![\Pi_2]\!] &= [\mathsf{L}]\,[\mathsf{T}]^a\left[\mathsf{M\,L^2\,T^{-2}}\right]^b\left[\mathsf{M\,L^{-3}}\right]^c\\
&= \mathsf{M}^{b+c}\mathsf{L}^{1+2b-3c}\mathsf{T}^{a-2b}.
\end{aligned}
$$

O sistema de equações resultante é

$$
\begin{aligned}
0a + 1b + 1c &= 0,\\
0a + 2b - 3c &= -1,\\
1a - 2b + 0c &= 0,
\end{aligned}
$$

cuja solução é $a = -2/5$, $b = -1/5$, $c = 1/5$. O segundo grupo adimensional, portanto, é:

$$
\Pi_2 = R t^{-2/5} E^{-1/5} \rho^{1/5}.
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Resolva:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}x = x_1\delta(t-a), \qquad a > 0, \qquad x(0) = x_0,$$

onde x_0 e x_1 são constantes com a mesma dimensão física de x, e T é uma constante com a mesma dimensão física de t.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Tente $x = uv$, e substitua:

$$\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}uv &= x_1\delta(t-a),\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= x_1\delta(t-a).
\end{aligned}$$

Zerando o colchete:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{v}{T},\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{\mathrm{d}t}{T},\\
\ln|v| &= -t/T + k_1,\\
|v| &= \exp(k_1)\exp(-t/T),\\
v &= \pm\exp(k_1)\exp(-t/T),\\
v(t) &= v(0)\exp(-t/T).
\end{aligned}$$

Substituindo no que restou:

$$\begin{aligned}
v(0)\exp(-t/T)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= x_1\delta(t-a),\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{x_1}{v(0)}\exp(t/T)\delta(t-a),\\
\mathrm{d}u &= \frac{x_1}{v(0)}\exp(\tau/T)\delta(\tau-a)\,\mathrm{d}\tau,\\
u(t) - u(0) &= \frac{x_1}{v(0)}\int_0^t \exp(\tau/T)\delta(\tau-a)\,\mathrm{d}\tau\\
u(t) - u(0) &= \frac{x_1}{v(0)}\exp(a/T)H(t-a)\\
x(t) = u(t)v(t) &= v(0)\exp(-t/T)\left[u(0) + \frac{x_1}{v(0)}\exp(a/T)H(t-a)\right]\\
&= u(0)v(0)\exp(-t/T) + x_1\exp(-(t-a)/T)H(t-a)\\
&= x_0\exp(-t/T) + x_1\exp(-(t-a)/T)H(t-a)\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Sabendo que, para $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{L}[t^n] = n!/s^{n+1}$, e utilizando **obrigatoriamente** Transformada de Laplace, resolva:

$$y'' + 3y' + 2y = x; \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Atenção: não há t neste problema! A variável independente, em relação à qual y é diferenciado, é x.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A transformada de ambos os lados da equação diferencial produz

$$\begin{aligned}
s^2\overline{y} + 3s\overline{y} + 2\overline{y} &= \frac{1}{s^2},\\
\overline{y}\left[s^2 + 3s + 2\right] &= \frac{1}{s^2},\\
\overline{y} &= \frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}\\
&= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}\\
&= \frac{As(s+1)(s+2) + B(s+1)(s+2) + Cs^2(s+2) + Ds^2(s+1)}{s^2(s+1)(s+2)}.
\end{aligned}$$

Reunindo os termos:

$$\begin{aligned}
1 &= A(s^3 + 3s^2 + 2s) + B(s^2 + 3s + 2) + C(s^3 + 2s^2) + D(s^3 + s^2),\\
1 &= (A + C + D)s^3 + (3A + B + 2C + D)s^2 + (2A + 3B)s + 2B.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
B &= 1/2,\\
2A + 3/2 = 0 &\Rightarrow A = -3/4,\\
C + D &= -A = 3/4,\\
2C + D &= -3A - B = 7/4,\\
C &= 1,\\
D &= -1/4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= (-3/4)\frac{1}{s} + (1/2)\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} - (1/4)\frac{1}{s+2},\\
y &= -3/4 + (1/2)x + \mathrm{e}^{-x} - (1/4)\mathrm{e}^{-2x} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Resolva

$$y'' + 3y' + 2y = x; \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

fazendo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Obtenha explicitamente, pelo menos: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5.
Atenção: Isto não é o método de Frobenius: derivando, e substituindo na equação diferencial, você consegue resolver o problema. Além disso: não se esqueça de levar em consideração o termo não-homogêneo x do lado direito da equação.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

A equação diferencial é

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x.$$

Mude o primeiro somatório:

$$\begin{aligned} m &= n-2, \\ n &= m+2, \\ n-1 &= m+1, \\ \sum_{m=-2}^{\infty} (m+1)(m+2) a_{m+2} x^m &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Mude o segundo somatório:

$$\begin{aligned} m &= n-1, \\ n &= m+1, \\ \sum_{m=-1}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \end{aligned}$$

Reúna os termos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= x, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + 3(n+1) a_{n+1} + 2a_n \right] x^n &= x \;\Rightarrow \\ 2a_2 + 3a_1 + 2a_0 &= 0, \\ 6a_3 + 6a_2 + 2a_1 &= 1, \\ (n+1)(n+2) a_{n+2} + 3(n+1) a_{n+1} + 2a_n &= 0, \; n \geq 2. \end{aligned}$$

Os coeficientes a_0 e a_1 devem ser encontrados em termos das condições iniciais. Isso é fácil:

$$\begin{aligned} y(0) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]_{x=0} &= a_0 = 0; \\ y'(0) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right]_{x=0} &= a_1 = 0. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Portanto,

$$\begin{aligned}
a_2 &= 0,\\
a_3 &= 1/6,\\
a_{n+2} &= -\frac{3(n+1)a_{n+1} + 2a_n}{(n+1)(n+2)}, \qquad n \ge 2,\\
a_n &= -\frac{3(n-1)a_{n-1} + 2a_{n-2}}{(n-1)n}, \qquad n \ge 4.
\end{aligned}$$

Fazendo as contas:

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{13}{120}x^5 - \frac{97}{1800}x^6 + \ldots$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Defina um corte no plano complexo que torne

$$f(z) = \left[1 + z^2\right]^{1/3}$$

unívoca. **Atenção: é obrigatório fazer um desenho do corte.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹