TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 27 set 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] Dada a equação de difusão-advecção

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

onde u e D são constantes, faça uma análise de estabilidade de von Neumann para o esquema explícito a seguir:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} = D\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Encontre uma relação entre os números de Courant, $\mathrm{Co} = u\Delta t/\Delta x$, e de Fourier, $\mathrm{Fo} = D\Delta t/\Delta x^2$, da forma

$$(a + b\mathrm{Fo})^2 + (c + d\mathrm{Co})^2 < 1;$$

os valores de a, b, c e d são provenientes da análise de estabilidade, e são por sua conta.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\epsilon_i^{n+1} - \epsilon_i^n + \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n\right) &= \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n\right),\\
\epsilon_i^{n+1} &= \epsilon_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n\right) + \mathrm{Fo}\left(\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n\right),\\
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i+1)\Delta x} - \xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right) +\\
&\quad \mathrm{Fo}\left(\xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i+1)\Delta x} - 2\xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right),\\
\mathrm{e}^{a\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i+1)\Delta x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right) +\\
&\quad \mathrm{Fo}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i+1)\Delta x} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right),\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right) + \mathrm{Fo}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right),\\
&= 1 - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(k_l\Delta x) + 2\mathrm{Fo}\left(\cos(k_l\Delta x) - 1\right)\\
&= 1 - 4\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) - 2\mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\cos\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right).
\end{aligned}$$

Faça $\theta = k_l\Delta x/2$; a condição para que o esquema seja estável é que

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 &< 1,\\
(1 - 4\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\theta)^2 + (2\mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)^2 &< 1,\\
(1 - 4\mathrm{Fo})^2 + \mathrm{Co}^2 &< 1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Se $f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, e sabendo que

$$\int_0^1 x^4 \,\mathrm{d}x = 1/5,$$
$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x = (2 - \operatorname{sen}(2))/4 \approx 0{,}2727,$$

use uma **desigualdade** para obter um limite superior para

$$\left|\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x\right|^2$$

com 4 algarismos significativos, e SEM CALCULAR A INTEGRAL.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
|\langle f, g\rangle|^2 &\le \|f\|^2 \, \|g\|^2 \\
&= \int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \int_0^1 |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 0{,}2 \times 0{,}2727 \\
&= 0{,}05454 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [40] Dada a equação da onda com as condições iniciais abaixo,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \qquad \phi(x,0) = x(1-x), \qquad \frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} = 1, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le t \le 1,$$

a) [20] Obtenha uma discretização de diferenças finitas totalmente implícita.

b) [20] Sua discretização certamente envolve ϕ_i^{n-1}, ϕ_i^n, e ϕ_i^{n+1} *simultaneamente*. Portanto, se $N = 1/\Delta x$ é o número de intervalos discretizados em x, você obviamente precisa alocar no mínimo uma matriz $3 \times (N+1)$ para marchar no tempo os valores de ϕ (certo?). À medida que você marcha no tempo t, os índices das 3 linhas dessa matriz (que vamos chamar de m, n, p) devem ser como se segue:

t	(m,n,p)
0	0, 1, 2
Δt	1, 2, 0
$2\Delta t$	2, 0, 1
$3\Delta t$	0, 1, 2
$\vdots$	$\vdots$

Escreva um trecho de programa em Python que transforma a “velha” tripla (m,n,p) na “nova” tripla (m,n,p) segundo o esquema acima.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\frac{\phi_i^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}.$$

b) Por exemplo,

```
#!/usr/bin/python
def troca(x) :
   m = x[0]
   n = x[1]
   p = x[2]
   return(n,p,m)
(m,n,p) = (0,1,2)
(m,n,p) = troca((m,n,p))
print (m,n,p)
(m,n,p) = troca((m,n,p))
print (m,n,p)
```

Mas até mesmo isto funciona:

```
(m,n,p)=(0,1,2)
(m,n,p)=(n,p,m)
print (m,n,p)
(m,n,p)=(n,p,m)
print (m,n,p)
```

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 27 set 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Se $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, $-\infty < x < +\infty$, calcule $[f*g](x)$ (no sentido de convolução de Fourier). Sugestão:

$$
[f*g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{I_2}.
$$

Note que ξ não muda de sinal em I_1 (onde $\xi \le 0$) nem em I_2 (onde $\xi > 0$): portanto, remova o módulo e trabalhe os sinais. Continue, reunindo novamente a expressão resultante em uma única integral, e integre, lembrando que "minha terra tem palmeiras onde canta o sabiá, seno a cosseno b, seno b cosseno a". Na parte final, você pode usar

$$
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi} \cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
[f*g](x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{+\xi} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\infty}^{0} \mathrm{e}^{-u} \operatorname{sen}(x+u)\,\mathrm{d}(-u) + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \operatorname{sen}(x+u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \left[\operatorname{sen}(x+\xi) + \operatorname{sen}(x-\xi)\right]\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \left[\operatorname{sen}(x)\cos(\xi) + \operatorname{sen}(\xi)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(\xi) - \operatorname{sen}(\xi)\cos(x)\right]\,\mathrm{d}\xi \\
&= 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \operatorname{sen}(x)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= 2\operatorname{sen}(x)\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \operatorname{sen}(x) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Calcule a série de Fourier complexa de

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad x \in [0,1].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}, \\ c_n &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n x} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \\ c_n &= \frac{1 - 1/\mathrm{e}}{2\pi \mathrm{i} n + 1} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Sabendo que

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2} \leftrightarrow \frac{a}{2}\mathrm{e}^{-|ka|}$$

formam um par de transformada-antitransformada de Fourier, encontre

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{a^2}{4}\mathrm{e}^{-2|ka|}\right\}.$$

Deixe sua resposta na forma de uma integral de convolução.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{f * f\right\} &= 2\pi\widehat{f}(k)\widehat{f}(k),\\
\mathscr{F}^{-1}\left\{[\widehat{f}(k)]^2\right\} &= \frac{1}{2\pi} f * f,\\
\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{a^2}{4}\mathrm{e}^{-2|ka|}\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{a^2}{\xi^2 + a^2}\right]\left[\frac{a^2}{(x-\xi)^2 + a^2}\right]\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Encontre a função de Green da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x^2}y = f(x).$$

Se não souber de cor $\int \mathrm{d}x/(1+x^2)$, tente $x = \operatorname{tg}\theta$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - G(x,\xi)\frac{1}{1+x^2}y &= G(x,\xi)f(\xi),\\
\int_{\xi=0}^{\infty} G\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty \frac{1}{1+\xi^2}Gy\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty Gf\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_0^\infty - \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty \frac{1}{1+\xi^2}Gy\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty Gf\,\mathrm{d}\xi\\
\cancelto{0}{G(x,\infty)y(\infty)} - G(x,0)y(0) - \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty \frac{1}{1+\xi^2}Gy\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty Gf\,\mathrm{d}\xi\\
\int_{\xi=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{1+\xi^2}G\right]}_{\delta(\xi-x)} y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= -\left[G(x,0)y(0) + \int_0^\infty Gf\,\mathrm{d}\xi\right]
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{1+\xi^2}G &= \delta(\xi-x),\\
\left[u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right] + \frac{1}{1+\xi^2}uv &= \delta(\xi-x),\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{1+\xi^2}v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi-x),\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{1}{1+\xi^2}v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi,\\
\int_{v(x,0)}^{v(x,\xi)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\int_0^\xi \frac{1}{1+\tau^2}\mathrm{d}\tau,\\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= -\left[\operatorname{arctg}(\xi) - \operatorname{arctg}(0)\right] = -\operatorname{arctg}(\xi),\\
v(x,\xi) &= v(x,0)\exp\left[-\operatorname{arctg}(\xi)\right].
\end{aligned}
$$

Resta uma quadratura simples em u:

$$
\begin{aligned}
v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi-x),\\
v(x,0)\exp\left[-\operatorname{arctg}(\xi)\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi-x),\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{1}{v(x,0)}\exp\left[\operatorname{arctg}(\xi)\right]\delta(\xi-x),\\
u(x,\xi) - u(x,0) &= \frac{1}{v(x,0)}\int_{\tau=0}^{\xi}\exp\left[\operatorname{arctg}(\tau)\right]\delta(\tau-x)\mathrm{d}\tau,\\
u(x,\xi) &= u(x,0) + \frac{H(\xi-x)}{v(x,0)}\exp(\operatorname{arctg}x);\\
G(x,\xi) &= \left[u(x,0) + \frac{H(\xi-x)}{v(x,0)}\exp(\operatorname{arctg}x)\right]v(x,0)\exp\left[-\operatorname{arctg}(\xi)\right]\\
&= \left[G(x,0) + H(\xi-x)\exp(\operatorname{arctg}x)\right]\exp\left[-\operatorname{arctg}(\xi)\right].
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad G(x,0) = -\exp(\operatorname{arctg}x);\\
G(x,\xi) &= [H(\xi-x) - 1]\exp(\operatorname{arctg}\xi - \operatorname{arctg}x) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 22 nov 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] A "condição inicial" do método das características **não precisa ser em** $t = 0$. Considere o seguinte problema:

$$t\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = xt$$

com $u = 1$ na curva $\Gamma : x + t = 1$. Mostre que a solução é $U(s) = 1 + \frac{X_0 T_0}{2}\left[e^{2s} - 1\right]$ sobre cada curva característica dada por $X(s) = X_0 e^s,\ T(s) = T_0 e^s,\ X_0 + T_0 = 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Havia um erro no enunciado da questão. A questão está **anulada**, e todos os alunos receberam o valor integral da questão.

A solução é a seguinte:

Suponha $X = X(s)$, $T = T(s)$ partindo de um ponto qualquer da curva $X_0 + T_0 = 1$ em uma direção transversal à mesma. Sobre a curva característica, $U = U(s)$, e comparamos:

$$\begin{aligned} t\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} &= xt, \\ \frac{dT}{ds}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dX}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{dU}{ds}. \end{aligned}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= X \Rightarrow X(s) = X_0 e^s, \\ \frac{dT}{ds} &= T \Rightarrow T(s) = T_0 e^s, \\ \frac{dU}{ds} &= XT = X_0 T_0 e^{2s} \Rightarrow U(s) - U_0 = X_0 T_0 \left[e^{2s}/2 - 1/2\right]; \\ U(0) = 1 &\Rightarrow U_0 = 1; \\ U(s) &= 1 + X_0 T_0 \left[e^{2s}/2 - 1/2\right], \end{aligned}$$

com $X_0 + T_0 = 1$ ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Considere o problema

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y = f(x), \qquad f(x) = x(1-x), \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

Expandindo inicialmente $x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e_n(x)$, encontre uma solução em série

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e_n(x),$$

onde $e_n(x)$ são as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

Você pode usar:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x = 1/2,$$

$$\int_0^1 x(1-x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A solução do problema de Sturm-Liouville é

$$\begin{aligned}\lambda_n &= n^2\pi^2,\\ e_n(x) &= \operatorname{sen}(n\pi x).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\pi x),\\ f(x)\operatorname{sen}(m\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x),\\ \int_0^1 x(1-x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= B_m \int_0^1 \left[\operatorname{sen}(m\pi x)\right]^2\,\mathrm{d}x,\\ \int_0^1 x(1-x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= B_m/2,\\ \frac{4}{\pi^3 m^3}\left[1-(-1)^m\right] &= B_m.\end{aligned}$$

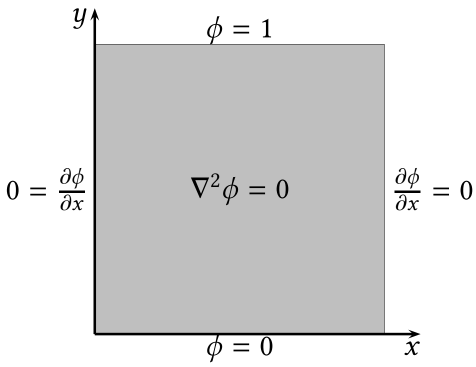
Tente agora $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e_n(x)$ e substitua na equação diferencial:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[1-n^2\pi^2\right]\operatorname{sen}(n\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right]\operatorname{sen}(n\pi x),\\ A_n &= \frac{4}{\pi^3 n^3(1-n^2\pi^2)}\left[1-(-1)^n\right] \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Para o quadrado hachuriado da figura ao lado, resolva a equação de Laplace com as condições de contorno indicadas:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,1) &= 1,\\
\frac{\partial\phi(0,y)}{\partial x} &= 0,\\
\frac{\partial\phi(1,y)}{\partial x} &= 0.
\end{aligned}
$$



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Usando o método de separação de variáveis,

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y) &= X(x)Y(y),\\
YX'' + XY'' &= 0,\\
\frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} = \lambda.
\end{aligned}
$$

Nós imediatamente "vemos" um problema de Sturm-Liouville em x:

$$
X'' - \lambda X = 0, \qquad X'(0) = X'(1) = 0.
$$

Se $\lambda > 0$,

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x),\\
X'(x) &= \sqrt{\lambda}\left[A\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)\right],\\
X'(0) &= 0 \Rightarrow B = 0,\\
X'(1) &= 0 \Rightarrow A = 0,
\end{aligned}
$$

e $\lambda > 0$ não pode ser autovalor. Se $\lambda = 0$,

$$
\begin{aligned}
X''(x) &= 0,\\
X(x) &= Ax + B,\\
X'(0) &= X'(1) = 0 \Rightarrow A = 0.
\end{aligned}
$$

Então, $\lambda = 0$ é autovalor, e $X_0(x) = 1$ é a autofunção associada. Se $\lambda < 0$,

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}x),\\
X'(x) &= \sqrt{-\lambda}\left[-A\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x)\right],\\
X'(0) &= 0 \Rightarrow B = 0,\\
X'(1) &= 0 \Rightarrow\\
-\sqrt{-\lambda}A\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}) &= 0,\\
\sqrt{-\lambda} &= n\pi,\\
\lambda_n &= -n^2\pi^2,\ n = 1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

As autofunções associadas são $X_n(x) = \cos(n\pi x)$.

Os $Y_n(y)$'s associados são

$$
\begin{aligned}
Y_0(y) &= C_0 + D_0 y,\\
Y_n(y) &= C_n\cosh(n\pi y) + D_n\,\mathrm{senh}(n\pi y),\ n = 1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

A solução é da forma

$$
\phi(x,y) = C_0 + D_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cosh(n\pi y) + D_n \operatorname{senh}(n\pi y) \right] \cos(n\pi x) \,.
$$

Aplicando as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
\phi(x,0) &= 0 \Rightarrow \\
C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x) &= 0, \Rightarrow \\
C_0 = C_1 = \ldots &= 0; \\
\phi(x,1) &= 1 \Rightarrow \\
D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{senh}(n\pi) \cos(n\pi x) &= 1, \Rightarrow \\
D_0 &= 1, \\
D_n &= 0, \; n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Portanto, a solução quase banal, e que poderia ter sido obtida por inspeção, é

$$
\phi(x,y) = y \;\blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 13 dez 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20]

a) [10] Prove que $\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x < \infty$ (calcule a integral).

b) [10] Prove que $\int_1^\infty x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \infty$ (calcule a integral).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A antiderivada (primitiva) é

$$\int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2x^{1/2}.$$

Segue-se que
a)

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2x^{1/2}\Big|_0^1 = 2 < \infty;$$

b)

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{-1/2}\,\mathrm{d}x &= 2x^{1/2}\Big|_1^\infty \\ &= \lim_{u\to\infty} 2\left(u^{1/2}-1\right) = \infty \ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] No entanto,

$$\int_0^\infty x^{-1/2}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Em sua opinião, a multiplicação de $x^{-1/2}$ pelo $\cos(x)$ tornou a integral convergente porque …

SOLUÇÃO DA QUESTÃO (COM LETRA DE FORMA E APENAS NO ESPAÇO DESIGNADO!) :
$x^{-1/2}$ é sempre positivo; $x^{-1/2}\cos(x)$ oscila produzindo "áreas" positivas e negativas que se compensam em média, fazendo com que a integral imprópria convirja ■

3 [30] Usando o valor da integral dada na questão **2** acima, calcule a transformada de Fourier $\widehat{f}(k)$ de

$$f(x) = |x|^{-1/2}.$$

Use:

$$\widehat{f}(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{-1/2}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x=0}^{+\infty} x^{-1/2}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{k^{-1/2}}{\pi}\int_{(kx)=0}^{+\infty} (kx)^{-1/2}\cos(kx)\,\mathrm{d}(kx)\\
&= \frac{1}{\pi k^{1/2}}\int_{u=0}^{+\infty} u^{-1/2}\cos(u)\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{\pi k^{1/2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}.
\end{aligned}$$

A ameixa no pudim: mas é claro que isso só vale para $k > 0$! Como sabemos que a transformada de Fourier de uma função par é par, o resultado para $k \neq 0$ deve ser

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|k|}}\ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [30] Usando **obrigatoriamente** o método das características, resolva

$$\frac{\partial u}{\partial t} + xt\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u(x,0) = f(x).$$

Sua resposta deve ser na forma $u(x,t) = f(\ldots)$, onde "..." é uma expressão envolvendo x e t.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $x = X(s)$, $t = T(s)$; então, $u(x,t) = u(X(s),T(s)) = U(s)$. Derive:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}.$$

Compare com a equação diferencial: devemos ter

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= 0,\\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1,\\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= X(s)T(s).\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, faça $T(0) = 0$, donde $T(s) = s$. Para x,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= Xs,\\ X &= X(0)\mathrm{e}^{s^2/2}.\end{aligned}$$

A equação diferencial para U produz $U(s) = U(0)$; portanto,

$$u(x,t) = U(s) = U(0) = u(X(0),T(0)) = f(X(0)) = f\left(X\mathrm{e}^{-s^2/2}\right) = f\left(x\mathrm{e}^{-t^2/2}\right) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 20 dez 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Dado o esquema numérico de Lax para a solução de

$$
\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0,
$$

$$
u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \mathrm{Co}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)\right],
$$

onde i é o subscrito para o espaço, n é o sobrescrito para o tempo, e $\mathrm{Co} = c\Delta t/\Delta x$ é o número de Courant, reescreva-o explicitando o termo de difusão numérica. **Sugestão:** subtraia u_i^n de ambos os lados, e prossiga.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
u_i^{n+1} - u_i^n &= \frac{1}{2}\left[(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)\right]\\
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \left[\frac{\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)}{2\Delta t} - \frac{c}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)\right]\\
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \underbrace{\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)}{2\Delta x^2}}_{\text{termo difusivo}} - c\frac{\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)}{2\Delta x} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] O aluno Arlindoin Terno deseja escrever a função $f(x) = x,\ -1 \le x \le 1$ em uma série usando as funções $P_{2n}(x)$, que são os polinômios de Legengre de ordem *par*. Lembrando-se de que os P_{2n}'s são mutuamente ortogonais, Arlindoin fez

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_{2n}(x),\\
xP_{2m} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_{2m}(x) P_{2n}(x),\\
\int_{-1}^{+1} xP_{2m}(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{+1} c_n P_{2m}(x) P_{2n}\,\mathrm{d}x,\\
\int_{-1}^{+1} xP_{2m}(x)\,\mathrm{d}x &= c_m \int_{-1}^{+1} P_{2m}^2(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

A questão que você deve resolver é: sabendo que $P_n(x)$ é par se n é par; é ímpar se n é ímpar; e que

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x = P_1(x),\\
\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \qquad (\delta_{mn} \text{ é o delta de Kronecker}),
\end{aligned}
$$

a) [10] Quais foram os c_m's que Arlindoin encontrou?

b) [10] Com base em sua resposta do item a): o conjunto $\{P_{2n}(x)\}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$, é uma base na qual $f(x)$ pode ser escrita? Por quê? (**Dê uma resposta clara, concisa, e completa**.)

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Por inspeção, $c_m = 0$. Logo, é impossível escrever $f(x)$ em torno desses $P_{2n}(x)$ (pois $0 \neq x$), e eles não constituem uma base: uma base é um conjunto LI de vetores em termos dos quais **qualquer** vetor do espaço vetorial pode ser escrito.

Continue a solução no verso ⟹

3 [30] Calcule a série **trigonométrica** de Fourier de

$$f(x) = x^2, \qquad -1 \le x \le +1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \qquad \text{(pois } f(x) \text{ é par)},\\
A_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{1} x^2 \cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x\\
&= \begin{cases} 2/3 & n = 0,\\ (-1)^n \frac{4}{\pi^2 n^2} & n > 0 \end{cases} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [30] Usando o método de separação de variáveis, resolva

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x \ge 0,\ t \ge 0, \qquad u(x,0) = u_0, \qquad u(0,t) = u_0.$$

Atenção: A solução $u(x,t) = X(x)T(t)$ envolve um único termo (**exatamente como escrito aqui**), e **não uma série**, e não há nenhum problema de Sturm-Liouville para resolver.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $u(x,t) = X(x)T(t)$, e substitua:

$$\begin{aligned}
X\frac{dT}{dt} + tT\frac{dX}{dx} &= 0,\\
\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} + \frac{t}{X}\frac{dX}{dx} &= 0,\\
\frac{1}{tT}\frac{dT}{dt} + \frac{1}{X}\frac{dX}{dx} &= 0,\\
\frac{1}{tT}\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{X}\frac{dX}{dx} &= \lambda
\end{aligned}$$

Ataquemos separadamente cada um dos dois problemas: para T,

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{T} &= \lambda t dt,\\
\ln\frac{T(t)}{T_0} &= \lambda t^2/2,\\
T(t) &= T_0 \exp\left(\lambda t^2/2\right).
\end{aligned}$$

Para X,

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{X} &= -\lambda dx,\\
\ln\frac{X}{X_0} &= -\lambda x,\\
X(x) &= X_0 \exp(\lambda x).
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= X_0 T_0 \exp\left[\lambda\left(x + t^2/2\right)\right],\\
&= U_0 \exp\left[\lambda\left(x + t^2/2\right)\right]
\end{aligned}$$

Note que há apenas dois parâmetros independentes, U_0 e λ. Para encontrá-los, é preciso resolver o sistema

$$\begin{aligned}
u(x,0) = u_0 &= U_0 \exp[\lambda x],\\
u(0,t) = u_0 &= U_0 \exp\left[\lambda t^2/2\right].
\end{aligned}$$

Portanto, $U_0 = u_0$, $\lambda = 0$, e

$$u(x,t) = u_0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹