TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 23 nov 2012
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [35] **(O jogo dos 7 erros.)** Considere a equação de advecção-difusão unidimensional

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U\frac{\partial \phi}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K\phi, \qquad 0 \le x \le \infty, \qquad t > 0,$$

com condições iniciais e de contorno

$$\begin{aligned} \phi(x,0) &= 0,\\ \phi(0,t) &= \Phi_M,\\ \phi(\infty,t) &= 0. \end{aligned}$$

A solução analítica é

$$\phi(x,t) = \frac{\Phi_M}{2}\left[\exp\left(\frac{Ux}{2D}(1+(1+2H)^{1/2})\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x+Ut(1+2H)^{1/2}}{\sqrt{4Dt}}\right) + \exp\left(\frac{Ux}{2D}(1-(1+2H)^{1/2})\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x-Ut(1+2H)^{1/2}}{\sqrt{4Dt}}\right)\right],$$

onde

$$H = 2KD/U^2.$$

O programa abaixo, que calcula a solução analítica e imprime um arquivo binário com resultados da solução em função de x, para intervalos $\Delta t = 0.001$ e para $U = 1$, $D = 2$, $K = 1$ e $\Phi_M = 1$ (em unidades arbitrárias), **possui 7 erros**. Identifique-os, e explique o que precisa ser feito para consertar cada um. Cada erro corretamente identificado e consertado vale 5 pontos.

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from __future__ import print_function
from __future__ import division
fou = open('difadv-ana.dat','wb')
dx = 0.01
dt = 0.001
print('#␣dx␣=␣%9.4f' % dx)
print('#␣dt␣=␣%9.4f' % dt)
nx = int(10.0/dx)
nt = int(1.0/dt)
print('#␣nx␣=␣%9d' % nx)
print('#␣nt␣=␣%9d' % nt)
from math import sqrt, erfc  # <1 FALTOU IMPORTAR exp
U = 1.0
D = 2.0
K = 1.0
FIM = 1.0
a0 = U/(2*D)
h = 2*K*D/U**2
s = sqrt(1 + h)              # <2 s = sqrt(1 + 2*h)
def ana(x,t):
   a = a0*x
   e1 = (x + U*t*s)/(sqrt(-4*D*t)) # <3 e1 = (x + U*t*s)/(sqrt(4*D*t))
   e2 = (x - U*t*s)/(sqrt(4*D*t))
   fi = FIM*0.5*(exp(a*(1 + s))*erfc(e1) + exp(a*(1-s))*erfc(e2))
   return fi
# <4 from numpy import zeros
u = zeros(nx+1,float)
u.tofile(fou)
for n in range(1,nt+1):
   t = n*dt
   print t                  # <5 print(t)
   for i in range(nx):      # <6 for i in range(nx+1)
      xi = i*dx
      u[i] = ana(xi,t)
   write(u.tofile(fou))     # <7 u.tofile(fou)
fou.close()
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Se $f(t) \leftrightarrow \overline{f}(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$ são um par função–transformada de Laplace, calcule

$$\mathscr{L}\left\{tf(t)\right\}.$$

Sugestão: escreva $\overline{f}(s)$ em termos de sua integral definidora. Derive em relação a s, observando que os limites da integral são fixos, e que portanto é possível comutar a derivada em relação a s com a integral em t.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\overline{f}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt;\\
\frac{d\overline{f}}{ds} &= -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\,dt = -\mathscr{L}\{tf(t)\};\\
\mathscr{L}\{tf(t)\} &= -\frac{d\overline{f}}{ds} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [35] Dada a equação da onda,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

considere o esquema *upwind*

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

e suponha que ele induza difusão numérica: isso significa que ele deve ser algebricamente **idêntico** a uma expressão do tipo

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x}} + \widetilde{D}\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

onde $\widetilde{\partial u/\partial x}$ representa **alguma** aproximação numérica da derivada $\partial u/\partial x$, e $\widetilde{D}$ é o coeficiente de difusão numérica. Partindo da identidade

$$u_i^n - u_{i-1}^n \equiv u_i^n - u_{i-1}^n + (u_{i+1}^n - u_{i+1}^n) + (u_{i-1}^n - u_{i-1}^n) + (2u_i^n - 2u_i^n),$$

a) [25] obtenha as expressões para $\widetilde{D}$ e $\widetilde{\partial u/\partial x}$;

b) [10] interprete a expressão obtida para $\widetilde{\partial u/\partial x}$ como uma ponderação (com pesos e sinais diferentes!) de uma derivada progressiva e uma derivada regressiva no espaço.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

O enunciado de (b) estava confuso e essencialmente errado. O item (a) teve peso reduzido para 20. O item (b) teve peso aumentado para 15, e foi dado integralmente para todos os alunos.

(a):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x}\left[(u_i^n - u_{i-1}^n) + (u_{i+1}^n - u_{i+1}^n) + (u_{i-1}^n - u_{i-1}^n) + (2u_i^n - 2u_i^n)\right] = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x}\left[(u_i^n - u_{i-1}^n) + (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + (-u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n)\right] = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x}\left[(u_i^n - u_{i-1}^n) + (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\right] = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = (c\Delta x)\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Portanto:

$$\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x},$$
$$\widetilde{D} = c\Delta x.$$

(b): anulado.

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 21 dez 2012
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Obtenha

$$\int_{-\infty}^{x} H(x-a)\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x,$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Este é um problema mais ou menos "clássico": sejam $F(x)$ e $f(x) = F'(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} \underbrace{H(x-a)}_{u}\underbrace{f(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} &= H(\xi-a)F(\xi)\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} F(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x \\
&= H(x-a)F(x) - H(x-a)F(a) \\
&= H(x-a)\left[F(x) - F(a)\right] \Rightarrow \\
\int_{-\infty}^{x} H(x-a)\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x &= -H(x-a)\left[\cos(x) - \cos(a)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Dados dois vetores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, define-se:

$$
\begin{aligned}
g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}, \\
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\mapsto z = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(k)(x_k y_k)}{|x_k||y_k|} \right];
\end{aligned}
$$

verifique se $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ é um produto interno legítimo. **Justifique!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Não:

$$
[g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})] = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k) y_k x_k}{|y_k||x_k|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k) x_k y_k}{|x_k||y_k|} \neq [g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]^*.
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Obtenha a série de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0, \\ 1/2 & x = 0, \\ 1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right); \\
A_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \cos\left(\frac{2n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = 1\ (n=0)\ \text{ou}\ 0\ (n>0); \\
B_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]; \\
f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\operatorname{sen}(n\pi x) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = [H(x-1) - H(x+1)]\,\mathrm{sen}(x),$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x+1) - H(x-1)]\,\mathrm{sen}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{+1} \mathrm{sen}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{+1} \mathrm{sen}(x)\,[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)]\,\mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{i}\int_{-1}^{+1} \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\frac{(k-1)\,\mathrm{sen}(k+1) - (k+1)\,\mathrm{sen}(k-1)}{k^2-1} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II (2012-2)
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 08 fev 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [50] Obtenha a função de Green da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + xy = f(x); \qquad y(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty G(x,\xi)\frac{dy}{d\xi}\,d\xi + \int_0^\infty G(x,\xi)\xi y(\xi)\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi \\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,0)y(0) - \int_0^\infty y(\xi)\frac{dG}{d\xi}\,d\xi + \int_0^\infty G(x,\xi)\xi y(\xi)\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

Faça

$$G(x,\infty) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
-G(x,0)y(0) + \int_0^\infty y(\xi)\left[-\frac{dG}{d\xi} + G(x,\xi)\xi\right]\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi; \\
-\frac{dG}{d\xi} + G(x,\xi)\xi &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}$$

Faça

$$G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi) :$$

$$\begin{aligned}
-u\frac{dv}{d\xi} - v\frac{du}{d\xi} + uv\xi &= \delta(\xi - x); \\
u\left[-\frac{dv}{d\xi} + v\xi\right] + v\frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x); \\
-\frac{dv}{d\xi} + v\xi &= 0; \\
\frac{dv}{v} &= \xi\,d\xi; \\
\int_{v(x,0)}^{v(x,\xi)} \frac{dv}{v} &= \int_0^\xi \eta\,d\eta; \\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= \frac{1}{2}\xi^2; \\
v(x,\xi) &= v(x,0)\exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right).
\end{aligned}$$

Procure $u(x,\xi)$:

$$\begin{aligned}
-v(x,0)e^{\xi^2/2}\frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x), \\
-\frac{du}{d\xi} &= \frac{1}{v(x,0)}e^{-\xi^2/2}\delta(\xi - x), \\
\frac{du}{d\eta} &= -\frac{1}{v(x,0)}e^{-\eta^2/2}\delta(\eta - x), \\
u(x,\xi) - u(x,0) &= -\frac{1}{v(x,0)}\int_{\eta=0}^{\xi} e^{-\eta^2/2}\delta(\eta - x)\,d\eta, \\
u(x,\xi) &= u(x,0) - \frac{H(\eta - x)}{v(x,0)}e^{-x^2/2}
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Recompondo a G,

$$\begin{aligned}
G(x,\xi) &= u(x,\xi)v(x,\xi)\\
&= \left[u(x,0) - \frac{H(\eta - x)}{v(x,0)}e^{-x^2/2}\right] v(x,0)\exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)\\
&= \left[G(x,0) - H(\xi - x)e^{-x^2/2}\right] e^{\xi^2/2}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
G(x,\infty) = 0 \Rightarrow G(x,0) = e^{-x^2/2},\\
G(x,\xi) = \left[1 - H(\xi - x)\right] e^{\frac{1}{2}(\xi^2 - x^2)}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [50] Ache os autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = y'(1) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Somente λ's positivos serão autovalores. A solução geral é

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x), \\ y'(x) &= \sqrt{\lambda}\left[-A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)\right], \\ y'(0) = 0 &\Rightarrow B = 0, \\ y'(1) = 0 &\Rightarrow \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} &= n\pi, \\ \lambda_n &= n^2\pi^2, \\ y_n(x) &= \cos(n\pi x) \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II (2012-2)
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 15 mar 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [50] Obtenha $\phi(x,t)$ pelo método das características:

$$
\frac{\partial \phi}{\partial t} + e^{-t}\frac{\partial \phi}{\partial x} = x, \qquad \phi(x,0) = f(x).
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $\phi(x,t) = F(s)$ sobre $x = X(s)$ e $t = T(s)$:

$$
\begin{aligned}
\phi(X(s),T(s)) &= F(s);\\
\frac{dF}{ds} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{dT}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dX}{ds};\\
\frac{dT}{ds} &= 1 \Rightarrow T(s) = \underbrace{T(0)}_{\equiv 0} + s,\\
\frac{dX}{ds} &= e^{-t} = e^{-s},\\
\int_{X(0)}^{X(s)} d\xi &= \int_0^s e^{-\tau}\,d\tau,\\
X(s) - X(0) &= 1 - e^{-s} \Rightarrow X(0) = X(s) - 1 + e^{-s}.
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + e^{-t}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= x,\\
\frac{dF}{ds} &= X(0) + 1 - e^{-s},\\
F(s) - F(0) &= \int_{\tau=0}^{s} \left[X(0) + 1 - e^{-tau}\right]\,d\tau\\
F(s) &= F(0) + (X(0)+1)s + (e^{-s} - 1)\\
F(0) &= f(X(0)) = f(x - 1 + e^{-t});\\
\phi(x,t) = F(s) &= f(x - 1 + e^{-t}) + (x - 1 + e^{-t} + 1)t + (e^{-t} - 1)\\
\phi(x,t) &= f(x - 1 + e^{-t}) + (x + e^{-t})t + (e^{-t} - 1) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [50] Resolva a equação de Schrödinger

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},\\
\Psi(0,t) &= \Psi(L,t) = 0,\\
\Psi(x,0) &= \Psi_0\frac{x}{L},
\end{aligned}
$$

(onde $\hbar$ e m são constantes, e $i = \sqrt{-1}$), utilizando o método de separação de variáveis. Observação:

$$
\int_0^1 x\,\mathrm{sen}(ax)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(a) - a\cos(a)}{a^2}.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{2im}{\hbar}\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2},\\
\frac{2im}{\hbar}X\frac{dT}{dt} &= -T\frac{d^2X}{dx^2},\\
\frac{2im}{\hbar T}\frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno sugerem um problema de Sturm-Liouville em X,

$$
\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(L) = 0,
$$

donde

$$
X_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad \lambda_n = n^2\pi^2/L^2.
$$

A equação em T será

$$
\begin{aligned}
\frac{2im}{\hbar T}\frac{dT}{dt} &= \frac{n^2\pi^2}{L^2},\\
\frac{dT_n}{T_n} &= \frac{\hbar n^2\pi^2}{2imL^2},\\
T_n(t) &= A_n e^{\frac{\hbar n^2\pi^2 t}{2imL^2}},\\
T_n(t) &= A_n e^{-\frac{i\hbar n^2\pi^2 t}{2mL^2}}.
\end{aligned}
$$

Procure a solução por superposição, como sempre:

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{i\hbar n^2\pi^2 t}{2mL^2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
\Psi(x,0) = \Psi_0\frac{x}{L} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
\Psi_0\frac{x}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right),\\
\Psi_0\int_0^L \frac{x}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx &= \int_0^L\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]dx,\\
\Psi_0\int_0^L \frac{x}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx &= A_k\frac{L}{2},\\
A_k &= \frac{2\Psi_0}{L}\int_0^L \frac{x}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx,\\
&= \frac{2\Psi_0(-1)^{k+1}}{\pi k}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Psi_0(-1)^{n+1}}{\pi n}e^{-\frac{i\hbar n^2\pi^2 t}{2mL^2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 22 mar 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [25] Calcule a transformada de Laplace de $\cos^2(t)$. Sugestão: encare a integral definidora.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\int_0^\infty \cos^2(t)e^{-st}\,dt = \frac{s^2+2}{s^3+4s} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Calcule a transformada de Laplace de $e^t\delta(t-b)$, onde $b > 0$ e $\delta(\cdot)$ é a distribuição delta de Dirac.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\int_0^\infty e^t\delta(t-b)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{(-s+1)t}\delta(t-b)\,dt$$
$$= e^{-s+1}b \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Se

$$f(x) = x^2, \qquad 0 < x < \pi,$$

obtenha uma série de Fourier para $f(x)$ contendo apenas cossenos.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
É mais ou menos óbvio que se trata da série de Fourier da expansão par de $f(x)$:

$$f_p(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{2\pi}\right),$$

com

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos\left(\frac{2n\pi x}{2\pi}\right)\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx\\
&= \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3}, & n = 0,\\ (-1)^n\frac{4}{n^2}, & n > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Resolva a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

no retângulo $0 < x < L$, $0 < y < M$, com condições de contorno

$$\phi(0,y) = 0 \qquad \phi(L,y) = 0,$$
$$\phi(x,M) = 0, \qquad \phi(x,0) = f(x).$$

Deixe sua resposta em termos de integrais envolvendo $f(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Este é um problema clássico de separação de variáveis. A maior parte dos passos já foi feita em sala, para um problema muito parecido (senão igual!).
Fazendo

$$\phi(x,y) = X(x)Y(y)$$

encontramos um problema de Sturm-Liouville em x, com

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \qquad \lambda_n = n^2\pi^2/L^2.$$

Resolvendo para $Y(y)$ e impondo as condições de contorno,

$$Y_n(y) = \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{L}(M-y)\right).$$

A solução geral é do tipo

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{L}(M-y)\right).$$

Os coeficientes de Fourier A_n são a solução de

$$A_n \operatorname{senh}\frac{n\pi M}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$